

## Разнойбой по алгебре

22.01.2022

1. При каких натуральных  $n$  число  $3^n + 4n - 1$  является точным квадратом?
2. Для углов  $\alpha, \beta, \gamma$  справедливо неравенство  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq 2$ . Докажите, что  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{5}$ .
3. Решите в положительных числах систему:  $x^y = z, y^z = x, z^x = y$ .
4. Найдите все тройки попарно взаимно простых натуральных чисел  $a, b, c$  такие, что число  $(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$ -целое.
5. Решите в вещественных числах систему  $x(y + z - x^3) = y(z + x - y^3) = z(x + y - z^3) = 1$ .
6. Натуральное число  $n$  назовём надёжным, если сумма нескольких его различных делителей, среди которых есть 1, равна  $n$ . Любое ли число является делителем некоторого надёжного числа?
7. Докажите, что если  $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$ , то  $x + y = 0$ .
8. Решите в целых числах уравнение:  $x^3 + y^4 = 7$ .
9. Натуральные числа  $a, b, c$  и простое  $p > 3$  таковы, что  $a + b + c = p + 1$ , и  $a^3 + b^3 + c^3 - 1$  делится на  $p$ . Докажите, что одно из чисел  $a, b, c$  равно 1.