Неравенство Йенсена

21 декабря 2021

Лемма 1. Если функция f непрерывна и для любых a и b из области определения имеет место неравенство

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

то для любых α и $\beta \geqslant 0$ таких, что $\alpha+\beta=1$ выполнено

$$\alpha f(a)+\beta f(b) \geqslant f(\alpha a+\beta b).$$

Доказательство. Докажем сначала для двоично-рациональных α и β индукцией по степени двойки у знаменателя n.
База для $n=1$ у нас есть.
Предположение: пусть для всех $n \leqslant k-1$ верно, тогда верно и для $n=k$.
Переход. Хотим доказать неравенство для $\alpha=\frac{p}{2^k}$ и $\beta=\frac{2^k-p}{2^k}$, $\alpha<\beta$. По предположению имеем

$$\frac{p}{2^{k-1}}f(a)+\frac{2^{k-1}-p}{2^{k-1}}f(b) \geqslant f\left(\frac{p}{2^{k-1}}a+\frac{2^{k-1}-p}{2^{k-1}}b\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{p}{2^k}f(a)+\frac{2^k-p}{2^k}f(b)=\frac{\frac{p}{2^{k-1}}f(a)+\frac{2^{k-1}-p}{2^{k-1}}f(b)+f(b)}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{f\left(\frac{p}{2^{k-1}}a+\frac{2^{k-1}-p}{2^{k-1}}b\right)+f(b)}{2} \geqslant f\left(\frac{p}{2^k}a+\frac{2^k-p}{2^k}b\right)$$

Доказали переход. Теперь докажем для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\beta=(1-\alpha)$. Построим сходящуюся к α последовательность двоично-рациональных α_i. Для коэффициентов α_i и $1-\alpha_i$ мы уже доказали, теперь перейдём к пределу и получим.

$$\alpha f(a)+\beta f(b) \geqslant f(\alpha a+\beta b).$$

Определение. Если функция обладает этим свойством, будем называть её выпуклой.

Лемма 2. Если для $f(x)$ в области определения выполнено: $f(x)'' \geqslant 0$, то f выпуклая.

Доказательство. Дважды воспользуемся формулой конечных приращений (Теоремой Лагранжа).

$$\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2)=$$

$$=\alpha(f(x_1)-f(\alpha x_1+\beta x_2))+\beta(f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2))=$$

$$=\alpha f'(c_1)(x_1-\alpha x_1-\beta x_2)+\alpha f'(c_2)(x_2-\alpha x_1-\beta x_2)=$$

так как $\alpha + \beta = 1$

$$= \alpha\beta(f'(c_2) - f'(c_1))(x_2 - x_1) = \alpha\beta f''(c)(c_2 - c_1)(x_2 - x_1),$$

где $x_1 < c1 < \alpha x_1 + \beta x_2 < c_2 < x_2$ и $c_1 < c < c_2$.

Неравенство Йенсена. Если f выпукла, то для любых вещественных $x_1, \ldots, x_n$ и положительных $p_1, \ldots, p_n$ выполнено

$$\frac{p_1 f(x_1) + \ldots + p_n f(x_n)}{p_1 + \ldots + p_n} \geqslant f\left(\frac{p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + \ldots + p_n}\right).$$

В частности, верно

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} \geqslant f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right).$$

Доказательство. Докажем индукцией по n аналогичную формулировку: Если f выпукла, то для любых вещественных $x_1, \ldots, x_n$ и положительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таких, что $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ верно

$$\alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n) \geqslant f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)$$

База: $n = 2$ - это само условие выпуклости.
Предположение: пусть для всех $n \leqslant k - 1$ верно, тогда верно и для $n = k$.
Переход.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \geqslant (\alpha_1 + \alpha_2) f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} x_2\right) + \sum_{i=3}^n \alpha_i f(x_i) \geqslant$$

$$\geqslant f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)$$

Сначала применили условие выпуклости для первых двух слагаемых, затем предположение для $n = k - 1$. Доказали.

Подсказка. Если есть выражение вида $X \cdot Y \cdot Z$, где X, Y, Z - какие-то большие и ужасные выражения, скорее всего, будет удобнее работать с логарифмом этого выражения: $\ln X + \ln Y + \ln Z$. То же касается X^Y - его логарифм будет $Y \ln X$.