

Неравенство Йенсена

21 декабря 2020

1. Проверьте на выпуклость/вогнутость следующие функции:

- (a) x^2 ;
- (b) a^x при фиксированном $a > 1$ (в частности при $a = e$);
- (c) x^p при фиксированном $p > 1$ на луче $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
- (d) то же, что в пункте (c), только $0 < p < 1$.
- (e) теперь $p < 0$.
- (f) $\ln x$, зная, что $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

2. Докажите для $x_1, \dots, x_n \in [0, \pi]$:

$$\frac{\sin x_1 + \dots + \sin x_n}{n} \leq \sin \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

3. (a) **Неравенство Юнга.** При $m, n, p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ доказать

$$\frac{m^p}{p} + \frac{n^q}{q} \geq mn.$$

(b) **Взвешенное неравенство о средних.** $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

$$a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \dots + a_n \cdot p_n \geq a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}.$$

4. Докажите для натуральных a, b, c :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} \geq a^{a/(a+b+c)} \cdot b^{b/(a+b+c)} \cdot c^{c/(a+b+c)}$$

5. Для положительных a, b, c, d докажите

$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{a+b} \leq \left(\frac{a}{c}\right)^a \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^b$$

6. Из внутренней точки M треугольника ABC проведены перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 к сторонам BC, CA и AB соответственно. Для какой точки M треугольника ABC величина $\frac{BC}{MA_1} + \frac{CA}{MB_1} + \frac{AB}{MC_1}$ примет наименьшее значение?