

## Неравенство Йенсена

21 декабря 2021

**Лемма 1.** Если функция  $f$  непрерывна и для любых  $a$  и  $b$  из области определения имеет место неравенство

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

то для любых  $\alpha$  и  $\beta \geq 0$  таких, что  $\alpha + \beta = 1$  выполнено

$$\alpha f(a) + \beta f(b) \geq f(\alpha a + \beta b).$$

**Доказательство.** Докажем сначала для двоично-рациональных  $\alpha$  и  $\beta$  индукцией по степени двойки у знаменателя  $n$ .

**База** для  $n = 1$  у нас есть.

**Предположение:** пусть для всех  $n \leq k-1$  верно, тогда верно и для  $n = k$ .

**Переход.** Хотим доказать неравенство для  $\alpha = \frac{p}{2^k}$  и  $\beta = \frac{2^k - p}{2^k}$ ,  $\alpha < \beta$ . По предположению имеем

$$\frac{p}{2^{k-1}} f(a) + \frac{2^k - p}{2^{k-1}} f(b) \geq f\left(\frac{p}{2^{k-1}} a + \frac{2^k - p}{2^{k-1}} b\right)$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ \frac{p}{2^k} f(a) + \frac{2^k - p}{2^k} f(b) &= \frac{\frac{p}{2^{k-1}} f(a) + \frac{2^k - p}{2^{k-1}} f(b) + f(b)}{2} \geq \\ &\geq \frac{f\left(\frac{p}{2^{k-1}} a + \frac{2^k - p}{2^{k-1}} b\right) + f(b)}{2} \geq f\left(\frac{p}{2^k} a + \frac{2^k - p}{2^k} b\right) \end{aligned}$$

Доказали переход. Теперь докажем для  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta = (1 - \alpha)$ . Построим сходящуюся к  $\alpha$  последовательность двоично-рациональных  $\alpha_i$ . Для коэффициентов  $\alpha_i$  и  $1 - \alpha_i$  мы уже доказали, теперь перейдём к пределу и получим.

$$\alpha f(a) + \beta f(b) \geq f(\alpha a + \beta b).$$

**Определение.** Если функция обладает этим свойством, будем называть её выпуклой.

**Лемма 2.** Если для  $f(x)$  в области определения выполнено:  $f(x)'' \geq 0$ , то  $f$  выпуклая.

**Доказательство.** Дважды воспользуемся формулой конечных приращений (Теоремой Лагранжа).

$$\begin{aligned} \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) - f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \\ &= \alpha(f(x_1) - f(\alpha x_1 + \beta x_2)) + \beta(f(x_2) - f(\alpha x_1 + \beta x_2)) = \\ &= \alpha f'(c_1)(x_1 - \alpha x_1 - \beta x_2) + \alpha f'(c_2)(x_2 - \alpha x_1 - \beta x_2) = \end{aligned}$$

$$\beta x_1 - \beta x_2 \quad \alpha x_1 - \alpha x_2$$

так как  $\alpha + \beta = 1$

$$= \alpha \beta (f'(c_2) - f'(c_1))(x_2 - x_1) = \alpha \beta f''(c)(c_2 - c_1)(x_2 - x_1),$$

где  $x_1 < c_1 < \alpha x_1 + \beta x_2 < c_2 < x_2$  и  $c_1 < c < c_2$ .

**Неравенство Йенсена.** Если  $f$  выпукла, то для любых вещественных  $x_1, \dots, x_n$  и положительных  $p_1, \dots, p_n$  выполнено

$$\frac{p_1 f(x_1) + \dots + p_n f(x_n)}{p_1 + \dots + p_n} \geq f\left(\frac{p_1 x_1 + \dots + p_n x_n}{p_1 + \dots + p_n}\right).$$

В частности, верно

$$\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right).$$

**Доказательство.** Докажем индукцией по  $n$  аналогичную формулировку: Если  $f$  выпукла, то для любых вещественных  $x_1, \dots, x_n$  и положительных  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  таких, что  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  верно

$$\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) \geq f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)$$

**База:**  $n = 2$  - это само условие выпуклости.

**Предположение:** пусть для всех  $n \leq k-1$  верно, тогда верно и для  $n = k$ .

**Переход.**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) &\geq (\alpha_1 + \alpha_2) f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} x_2\right) + \sum_{i=3}^n \alpha_i f(x_i) \geq \\ &\geq f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \end{aligned}$$

Сначала применили условие выпуклости для первых двух слагаемых, затем предположение для  $n = k-1$ . Доказали.

**Подсказка.** Если есть выражение вида  $X \cdot Y \cdot Z$ , где  $X, Y, Z$  - какие-то большие и ужасные выражения, скорее всего, будет удобнее работать с логарифмом этого выражения:  $\ln X + \ln Y + \ln Z$ . То же касается  $X^Y$  - его логарифм будет  $Y \ln X$ .

