Семинар 1. Сортировки и бинарный поиск

Yandex Algo, C, 2026

31.10.2026

1 Теория

1.1 Инверсии

Иверсией в массиве a называется пара индексов i и j таких, что $i < j$, но $a_i > a_j$. Найдите число инверсий за $O(n \log n)$.

1.2 Компараторы

- Назовите три обязательных свойства, которыми должна обладать функция, передаваемая в компаратор
- Какая сортировка называется устойчивой?
- Дана структура S с двумя целочисленными полями a и b. Массив x имеет вид: $x = [\{a : 1, b : 2\}, \{a : 1, b : 3\}, \{a : 1, b : 4\}]$. Также для структуры заведен компаратор *cmp*. Какой вид будет иметь x после применения сортировки? Опишите все возможные варианты.

```
struct S {
    int a;
    int b;
};
bool cmp(S left, S right) {
    return left.a < right.a;
}

...
auto x = [S{a: 1, b: 2}, S{a: 1, b: 3}, S{a: 1, b: 4}];
sort(x.begin(), x.end(), cmp);
// x - ?
```

2 Задачи

2.1 Ставки

У матча по квиддичу есть три исхода — победа первой команды, победы второй команды и ничья. На любой из этих исходов можно сделать ставку с некоторым

коэффициентом. Пусть для победы 1-й коэффициент составляет k_1, для победы второй k_2, для ничьей k_3. Если на первый исход поставили сумму a, то в случае победы 1-й команды вы получите обратно сумму $k_1 a$, иначе поставленная сумма не будет возвращена.
У вас есть 1000 галлеонов, вы хотите распределить их на ставки по каждому их 3-х исходов. Ваша цель – поставить на каждый исход a, b и c галлеонов соответственно, чтобы гарантированная сумма, которая будет возвращена, была максимальной. Иными словами, чтобы в самом худшем из трех исходов получить назад как можно больше.
Предложите оптимальный алгоритм, который найдет по трем коэффициентам максимальную гарантированную сумму возврата.

2.2 Неограниченный бинарный поиск

У вас есть бесконечная лента из ячеек, у нее есть начало и нет конца. В каждой ячейке записано число. Первые n ячеек ленты заполнены нулями, а дальше идет бесконечное число единиц. Найдите первую единицу как можно быстрее
Подсказка: ожидаемая асимптотика $O(\log(ans))$, где ans – номер ячеки, где хранится первая единица

2.3 Бинарная строка

Расстоянием Хемминга между двумя бинарными строками равной длины называется количество позиций, в которых они различаются.
Вам дана строка длины n, состоящая из ноликов и единиц. При этом известно, что есть хотя бы один нолик и хотя бы одна единица. Вам надо найти позицию любого нуля и любой единицы. Для этого можно делать запросы. Каждый запрос — бинарная строка длины n. В ответ на такой запрос придет расстояние Хемминга между строкой в запросе и загаданной строкой.
Предложите оптимальный алгоритм поиска позиций нуля и единицы.
Подсказка: ожидаемая асимптотика $O(\log(n))$

2.4 Отсутствующий элемент

Загадан отсортированный массив целых чисел длины n. Про него известно, что все числа уникальные и лежат в диапазоне от 1 до m. За один запрос Вы можете узнать значение элемента находящегося на позиции i. Задав оптимальноец число запросов, найдите минимальный элемент от 1 до m, отсутствующий в данном массиве.
Подсказка: ожидаемая асимптотика $O(\log(n))$

2.5 Осада

Вы – великий полководец, у вас есть отряд из n солдат и не менее великий медик.
Против вас выступает группа лучников, которая в минуту i выпускает на вас k_i стрел.
Ваши воины стоят в колонне один за другим, которую возглавляет воин под номером 1. Стойкость i-го воина равна r_i — число стрел, которое может выдержать воин до того, как умрет. Все стрелы сначала попадают в первого воина, после его смерти во второго и так далее, пока не кончится колонна.

Медик не спит. Если в минуту t оказалось, что все воины мертвы, то он раздает всем подорожник и в конце этой же минуты t воины воскресают и становятся в прежнюю колонну.
Чтобы быстро мониторить происходящее на поле боя, вам нужна система, которая каждую минуту будет показывать, сколько воинов осталось в строю. Битва идет q минут. Разработайте алгоритм для такого мониторинга.
Подсказка: ожидаемая асимптотика $O(q \log(n) + n)$

2.6 Поиск в матрице

Пусть M – матрица размера $n \times m$, в которой элементы каждой строки отсортированы в возрастающем порядке слева направо, а элементы каждого столбца отсортированы в возрастающем порядке сверзу вниз. Разработайте эффективный алгоритм для определения местонахождения целого числа x в матрице M или для определения, что матрица не содержит данное число. Сколько сравнений числа x с элементами матрицы выполняет алгоритм в худшем случае?
Подсказка: ожидаемая асимптотика $O(n + m)$

2.7 Точки в круге

Дана прямая $y = 0$ и n точек на плоскости, координаты i-й точки (x_i, y_i). Требуется построить окружность минимального радиуса, которая касалась бы прямой $y = 0$ и содержала бы внутри или на границе все n точек. Найти координату центра или сказать, что окружность построить нельзя.