

# Семинар 1. Сортировки и бинарный поиск

Tinkoff Generation, С, 2020

17.10.2020

## 1 Точки в круге

Дана прямая  $y = 0$  и  $n$  точек на плоскости, координаты  $i$ -й точки  $(x_i, y_i)$ . Требуется построить окружность минимального радиуса, которая касалась бы прямой  $y = 0$  и содержала бы внутри или на границе все  $n$  точек. Найти координату центра или сказать, что окружность построить нельзя.

## 2 Пакман

Игровое поле представляет собой клетчатую полосу  $1 \times n$ . В некоторых клетках находятся пакманы, в некоторых клетках — звёздочки, остальные клетки пусты.

Пакман может перемещаться в соседнюю клетку за 1 единицу времени. Если в клетке находится звёздочка, то пакман в момент перемещения в эту клетку и съедает звёздочку. Пакман съедает звёздочку мгновенно.

В начальный момент времени все пакманы начинают двигаться. Каждый из пакманов может неограниченное количество раз менять направление движения, но не должен выходить за пределы игрового поля. Пакманы не создают помех движению других пакманов; в одной клетке может находиться произвольное количество пакманов, движущихся в произвольных направлениях.

Ваша задача — определить минимально возможное время, за которое пакманы смогут съесть все звёздочки.

Считайте, что длина игрового поля может быть до  $10^5$ .

## 3 Ставки

У матча по квиддичу есть три исхода — победа первой команды, победы второй команды и ничья. На любой из этих исходов можно сделать ставку с некоторым коэффициентом. Пусть для победы 1-й коэффициент составляет  $k_1$ , для победы второй  $k_2$ , для ничьей  $k_3$ . Если на первый исход поставили сумму  $a$ , то в случае победы 1-й команды вы получите обратно сумму  $k_1 a$ , иначе поставленная сумма не будет возвращена.

У вас есть 1000 галлеонов, вы хотите распределить их на ставки по каждому из 3-х исходов. Ваша цель — поставить на каждый исход  $a$ ,  $b$  и  $c$  галлеонов соответственно, чтобы гарантированная сумма, которая будет возвращена, была максимальной. Иными словами, чтобы в самом худшем из трех исходов получить назад как можно больше.

Предложите оптимальный алгоритм, который найдет по трем коэффициентам максимальную гарантированную сумму возврата.

## 4 Неограниченный бинарный поиск

У вас есть бесконечная лента из ячеек, у нее есть начало и нет конца. В каждой ячейке записано число. Первые  $n$  ячеек ленты заполнены нулями, а дальше идет бесконечное число единиц. Найдите первую единицу как можно быстрее.

## 5 Бинарная строка

Расстоянием Хемминга между двумя бинарными строками равной длины называется количество позиций, в которых они различаются.

Вам дана строка длины  $n$ , состоящая из ноликов и единиц. При этом известно, что есть хотя бы один нолик и хотя бы одна единица. Вам надо найти позицию любого нуля и любой единицы. Для этого можно делать запросы. Каждый запрос — бинарная строка длины  $n$ . В ответ на такой запрос придет расстояние Хемминга между строкой в запросе и загаданной строкой.

Предложите оптимальный алгоритм поиска позиций нуля и единицы.

## 6 Отсутствующий элемент

Вам дан отсортированный массив чисел длины  $n$ . Про него известно, что все числа уникальные и лежат в диапазоне от 1 до  $m$ . Найдите минимальный элемент от 1 до  $m$ , отсутствующий в данном массиве.

## 7 Осада

Вы — великий полководец, у вас есть отряд из  $n$  солдат и не менее великий медик. Против вас выступает группа лучников, который в минуту  $i$  выпускает на вас  $k_i$  стрел.

Ваши воины стоят в колонне один за другим, которую возглавляет воин под номером 1. Стойкость  $i$ -го воина равна  $r_i$  — число стрел, которое может выдержать воин до того, как умрет. Все стрелы сначала попадают в первого воина, после его смерти во второго и так далее, пока не кончится колонна.

Медик не спит. Если в минуту  $t$  оказалось, что все воины мертвы, то он раздает всем подорожник и в конце этой же минуты  $t$  воины воскресают и становятся в прежнюю колонну.

Чтобы быстро мониторить происходящее на поле боя, вам нужна система, которая каждую минуту будет показывать, сколько воинов осталось в строю. Битва идет  $q$  минут. Разработайте алгоритм для такого мониторинга.

## 8 Поиск в матрице

Пусть  $M$  — матрица размера  $n \times m$ , в которой элементы каждой строки отсортированы в возрастающем порядке слева направо, а элементы каждого столбца отсортирова-

ны в возрастающем порядке сверху вниз. Разработайте эффективный алгоритм для определения местонахождения целого числа  $x$  в матрице  $M$  или для определения, что матрица не содержит данное число. Сколько сравнений числа  $x$  с элементами матрицы выполняет алгоритм в худшем случае?