

# Семинар 2. Динамическое программирование

Tinkoff Generation, С, 2020

05.12.2020

## 1 Банкомат

В стране далеко за океаном есть купюры  $n$  разных номиналов. Пусть  $c_i$  — номинал  $i$ -й купюры. Сколько минимум купюр понадобится, чтобы выдать сумму  $S$ ? Считайте, что количество купюр не ограничено.

1. Покажите на примере, что жадный алгоритм (каждый раз брать купюру максимального номинала, не превосходящего оставшуюся сумму) не подходит.
2. Предложите решение за  $O(nS)$ .
3. Предложите решение за  $O(nS)$  с памятью  $O(S)$ .
4. А если бы каждую купюру можно было использовать 1 раз?

## 2 Наименьшая надпоследовательность

Назовем строку  $s$  надпоследовательностью строки  $t$ , если  $t$  содержится в  $s$  как подпоследовательность. Строка является надпоследовательностью нескольких строк, если она является надпоследовательностью для каждой из них. Предложите алгоритм поиска наименьшей (по длине) надпоследовательности двух строк  $s$  и  $t$  за  $O(|s| \cdot |t|)$ .

## 3 Наибольшая общая подстрока

Предложите алгоритм поиска наибольшей общей подстроки (не подпоследовательности) строк  $s$  и  $t$  за  $O(|s| \cdot |t|)$  с помощью динамического программирования.

## 4 НОП с приколом

Вам даны последовательности  $a$  и  $b$  длины  $n$  и  $m$  соответственно. Опишите алгоритм нахождения наибольшей **по сумме элементов** общей подпоследовательности за время  $O(nm)$ .

## 5 Жадный рюкзак

Школьник предложил для решения задачи о рюкзаке (есть  $n$  предметов, стоимость каждого  $c_i$ , масса  $w_i$ , вместимость рюкзака  $M$ , набрать наибольшую сумму) такой алгоритм: посчитать удельную стоимость каждого предмета (то есть стоимость каждого грамма каждого предмета  $\frac{c_i}{w_i}$ ), отсортировать предметы по убыванию этой величины и брать в таком порядке те, которые влезают. Приведите пример входных данных, на которых это решение не будет работать (то есть  $n$ , массивы  $w_i$ ,  $c_i$  и вместимость  $M$ ).

## 6 Демоническое программирование

Берляндская дорога разделена на  $l$  участков, за проезд по  $i$ -му взимается плата  $d_i$ . Компания из  $n$  туристов решила переночевать.  $i$ -й турист находится на участке дороги  $x_i$ . Для ночевки нашлось  $m$  отелей, при этом  $i$ -й отель стоит на участке дороги  $y_i$ , может вместить  $p_i$  человек и стоимость размещения одного человека равна  $c_i$ . На каждом участке дороги может быть произвольное число как туристов, так и отелей (в том числе 0). Если человеку нужно добраться до отеля на том же участке дороги, что и он, плата не взимается (то есть можно считать, что платим мы только когда переходим на другой участок дороги). Предложите алгоритм поиска минимальной стоимости для размещения всех  $n$  туристов в отелях за время:

1.  $O(nmlP^2)$
2.  $O(nmP^2)$
3.  $O(nmP)$

P.S. Здесь за  $P$  обозначена максимальная вместительность отеля. Можно считать  $P \leq n$ .