

Задача А. О счетоводе

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Пусть после применения алгоритма Гаусса для матрицы $n \times m$ получилось r ступенек в ступенчатом виде (иначе говоря ранг матрицы равен r ; иначе говоря в соответствующей ОСЛУ r главных переменных). Укажите наиболее точную верную асимптотику алгоритма:

- a $O(n^3)$
- b $O(nmr)$
- c $O(n^2m)$
- d $O(r^2m + nm)$
- e $O(r^3)$

Задача В. О Фенвике

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

К дереву Фенвика с 1-индексацией сделали запрос суммы на префиксе длины 117012013 (то есть вызвали `sum(117012013)`). Сколько обращений к массиву, в котором хранится дерево, будет произведено?

Формат входных данных

Запишите одно число — ответ на задачу

Задача С. О наименьшем общем предке

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Дано дерево на n вершинах. Всего поступило q запросов. Для каждого из приведенных алгоритмов укажите его затраты по времени работы и памяти (наиболее точную оценку для каждого алгоритма).

Алгоритмы:

1. Бинарные подъемы
2. Эйлеров обход с использованием дерева отрезков
3. Эйлеров обход с использованием разреженных таблиц
4. Алгоритм Фараха-Колтона и Бендера

Затраты по времени:

1. $O(n + q)$
2. $O(n + q \log n)$
3. $O(n \log n + q)$
4. $O(n \log n + q \log n)$

Затраты по памяти:

1. $O(n)$
2. $O(n + q)$
3. $O(n \log n)$
4. $O(n \log n + q)$

Пример ответа: «111 234 314 412»

Замечание

Обратите, что первые символы должны идти именно в порядке 1234, то есть ответ выглядит как «1** 2** 3** 4**», а одна и та же асимптотика в теории может подходить к разным алгоритмам.

Задача D. O longest-path decomposition

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Дано корневое дерево на n вершинах. Для каждой вершины насчитали ее глубину. Для каждой вершины нашли самый глубокий лист в ее поддереве. Для каждой нелистой вершины v покрасили ровно одно ребро — в сына, содержащего в поддереве самый глубокий лист в поддереве вершины v (если таких сыновей несколько, выбрали любое ребро). Из покрашенных ребер составили пути.

Пусть мы стартуем из произвольного листа и поднимаемся на верх. Сколько путей пересечет наш путь в худшем случае?

1. $\Theta(1)$
2. $\Theta(\alpha(n))$
3. $\Theta(\log n)$
4. $\Theta(\sqrt{n})$
5. $\Theta(n)$

Пример ответа: 1

Задача Е. О задаче коммивояжера

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Дан квадрат размера $n \times n$. В нем закрашено n клеток. Есть фигура, способная ходить вверх, вниз, влево, вправо на одну клетку за один ход. Разрешается посещать ранее посещенные клетки. Она прошла данные клетки кратчайшим возможным маршрутом. Какая максимальная длина маршрута могла получиться?

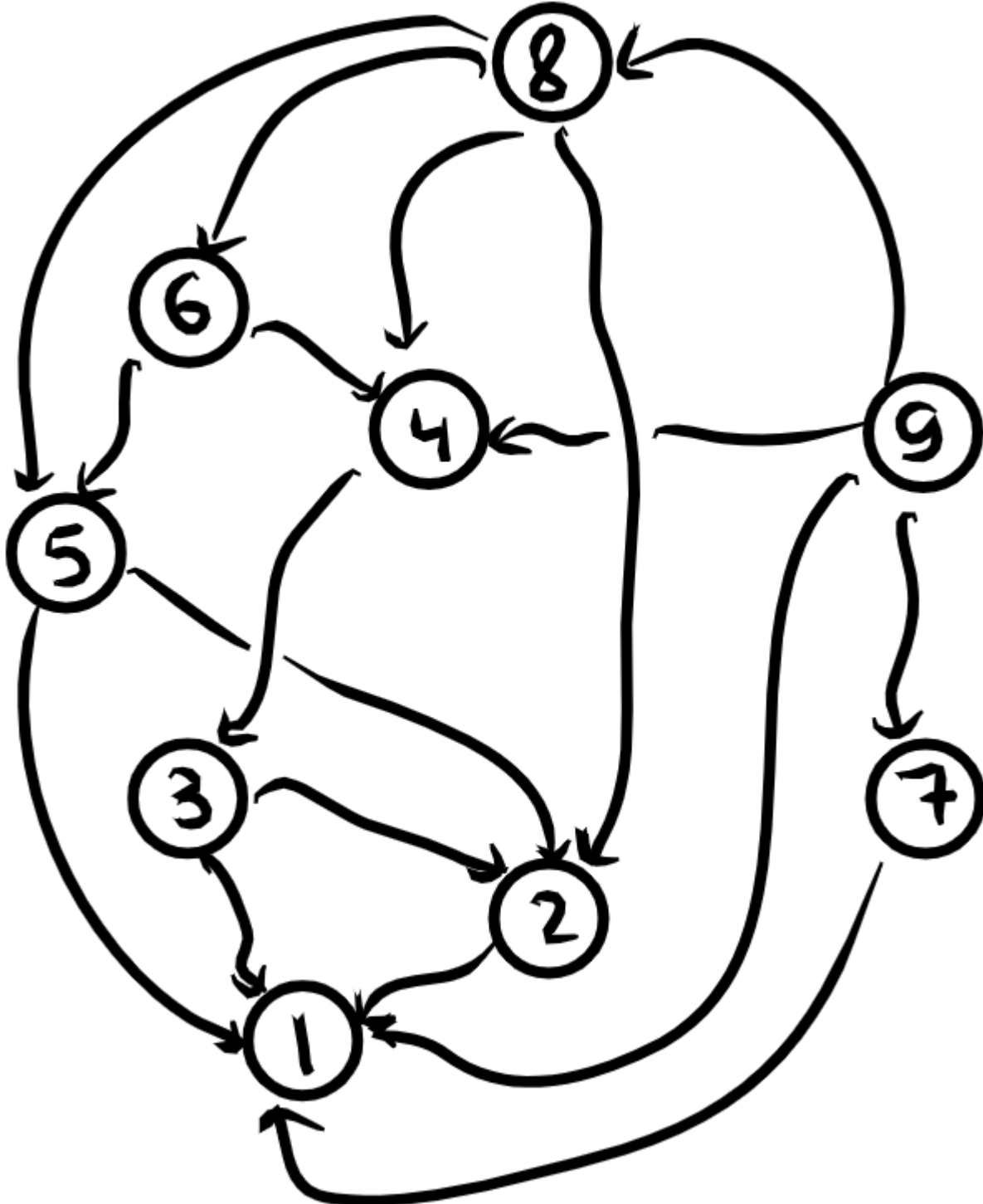
1. $\Theta(n)$
2. $\Theta(n \log n)$
3. $\Theta(n \log^2 n)$
4. $\Theta(n\sqrt{n})$
5. $\Theta(n^2)$

Пример ответа: 1

Задача F. О Шпрага-Гранди

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Выведите значения Шпрага-Гранди вершин от 1 до 9



Пример ответа: 0 1 1 2 0 1 1 2 0

Задача G. O выигрывающих ходах в ниме

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Ним, пять кучек, в них лежат 27, 22, 10, 5 и 1 камень.

Сколько есть выигрывающих ходов у первого игрока?

Чтобы вам было приятнее, за вас уже посчитали двоичные представления размеров кучек и их ксор.

1	1	0	1	1	27
1	0	1	1	0	22
	1	0	1	0	10
		1	0	1	5
				1	1
<hr/>					
0	0	0	1	1	

Пример ответа: 42

Задача Н. О случайных тестах в геометрических задачах

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Точки генерировались случайно равномерно в квадрате размера n на n .

Какой в среднем будет размер выпуклой оболочки?

a $O(1)$

b $O(\alpha(n))$

c $O(\log n)$

d $O(\sqrt{n})$

e $O(n)$

Пример ответа: a

Задача I. О куне

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Является ли данная реализация алгоритма Куна корректной (единственное отличие от классической верной реализации состоит в том, что операция `used.assign(n, false)` выполняется не всегда, а при некотором условии)?

```
bool Kuhn(int v) {
    if (used[v]) {
        return false;
    }
    used[v] = true;
    for (int u : g[v]) {
        if (mt[u] == -1 || Kuhn(mt[u])) {
            mt[u] = v;
            return true;
        }
    }
    return false;
}

// ...

mt.assign(n, -1);
used.assign(n, false);
for (int v = 0; v < n; ++v) {
    if (Kuhn(v)) {
        used.assign(n, false);
    }
}
```

Ответ представляет из себя один маленький символ. Если да, в ответ напишите "y". Иначе напишите "n".

Задача J. О времени работы странного куна

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Вне зависимости от того, является ли код в предыдущей задаче корректным, укажите его время работы. В графе n вершин в обеих долях, m ребер, размер максимального паросочетания равен k . Кратные ребра отсутствуют. Выполнено неравенство $k \leq n \leq m$. Выберите наиболее точную оценку.

- a $O(nm)$
- b $O(n^3)$
- c $O(nk)$
- d $O(km)$
- e $O(n^2k)$

Пример ответа: a

Задача К. О персистентной очереди

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Возьмем классическую реализацию персистентного стека.

Как вам должно быть известно, очередь можно написать на двух стеках. Напишем персистентную очередь таким же образом, просто заменив обычные стеки на персистентные. Поступает q запросов (запросы могут посылааться к произвольной версии очереди). Укажите худшее суммарное время работы.

- a $O(q)$
- b $O(q \log q)$
- c $O(q\sqrt{q})$
- d $O(q^2)$
- e $O(q^3)$

Пример ответа: a

Задача L. О суффиксном массиве

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Дана строка `abaabca#`. Выведите ее суффиксный массив. Символ `#` считается наименьшим из символов.

Например, если вы считаете, что суффиксным массивом строки `abc` является набор строк `c`, `abc`, `bc`, то вы должны вывести в качестве ответа `3 1 2` — потому что сначала вы выписали суффикс, начинающийся с третьей позиции, потом суффикс с первой позиции, потом суффикс со второй позиции.

Задача М. Об улучшенном ступенчатом виде

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Приведите данную матрицу (элементы принадлежат \mathbb{Z}_2) к улучшенному ступенчатому виду.
Подсказка: улучшенный ступенчатый вид определен однозначно вне зависимости от матрицы

1	0	0	0	0
1	1	1	1	0
0	0	0	1	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1

Пример ответа: 10001 01100 00011 00000 00000

Задача N. О центроидах

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Укажите верные факты о центроидах и центроидной декомпозиции.

- a Если в графе нечетное количество вершин, то в нем всегда ровно один центроид.
- b Если в графе четное количество вершин, то в нем всегда ровно два центроида.
- c Время построения центроидной декомпозиции составляет $O(n)$.
- d Время построения центроидной декомпозиции составляет $O(n \log n)$.
- e Если a является непосредственным родителем b в дереве центроидной декомпозиции и b является непосредственным родителем c в дереве центроидной декомпозиции, то вершины a , b и c лежат на одном пути в начальном дереве.
- f Если b является непосредственным родителем a в дереве центроидной декомпозиции и b является непосредственным родителем c в дереве центроидной декомпозиции, то вершины a , b и c лежат на одном пути в начальном дереве.

Пример ответа: a b c d

Задача О. О теории вероятностей

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Во всех следующих фактах для всех событий X считайте, что $0 < P(X) < 1$ (обратите внимания, что знаки строгие). Укажите верные факты (факт считается верным, если он верен при всех входных данных).

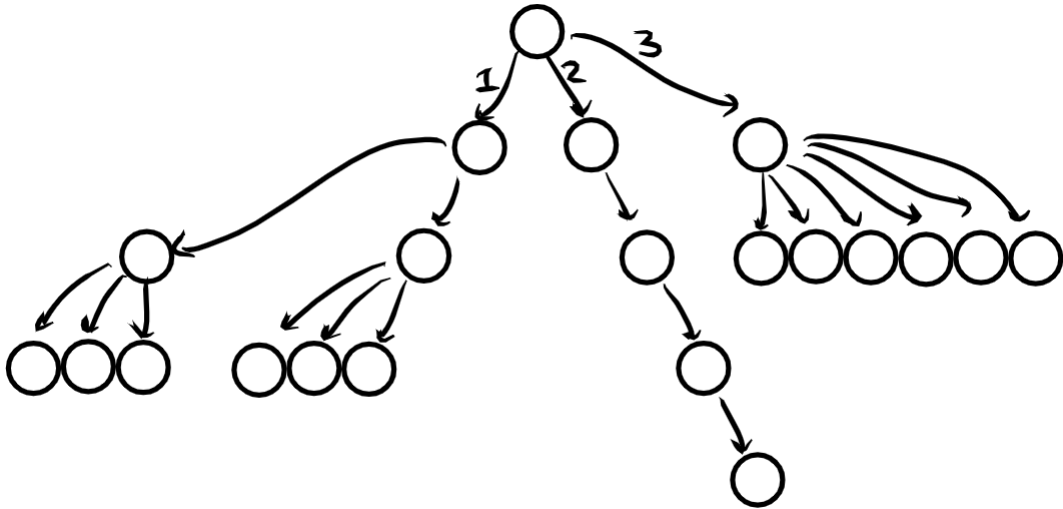
- a Если события A и B независимы, то $P(A|B) = P(A)$
- b Если события A и B независимы, то $P(A|B) = P(B)$
- c События A и B независимы тогда и только тогда, когда события \bar{A} и \bar{B} независимы.
- d Если A и B зависимы, B и C зависимы, то A и C зависимы.
- e $\mathbb{E}[\xi + \eta] = \mathbb{E}[\xi] + \mathbb{E}[\eta]$
- f $\mathbb{E}[\xi \cdot \eta] = \mathbb{E}[\xi] \cdot \mathbb{E}[\eta]$

Выведите номера верных утверждений через пробел. Пример ответа: a b c d

Задача P. О heavy-light decomposition

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Дано дерево. Какое из перечисленных ребер является тяжелым (выражаясь более точно, какое ребро мы посчитаем тяжелым при построении HLD)?



Пример ответа: 0

Задача Q. О декартовом дереве

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Дано декартово дерево на n вершинах.

Укажите математическое ожидание размера поддерева случайной вершины.

- a $O(1)$
- b $O(\log n)$
- c $O(\sqrt{n})$
- d $O(n)$
- e $O(n \log n)$
- f $O(n^2)$

Пример ответа: a

Задача R. Об остаточной сети

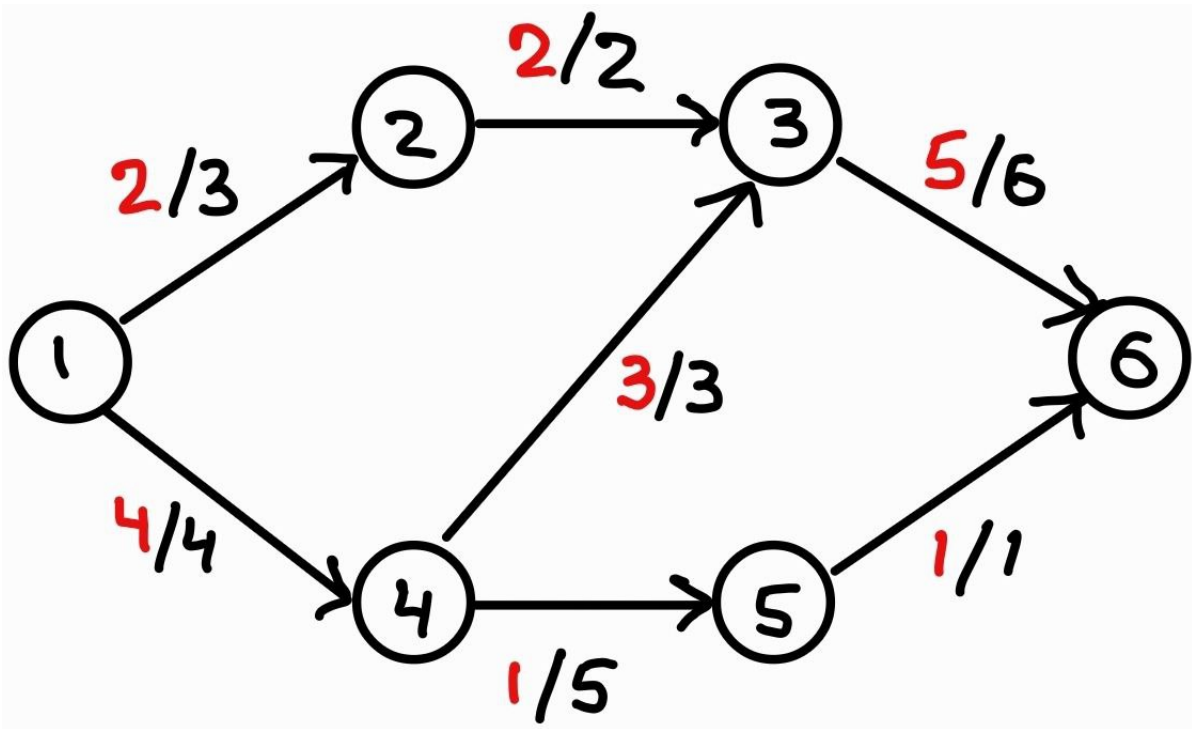
Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Определение потока я дам:

- $f_{uv} = -f_{vu}$
- $f_{uv} \leq c_{uv}$
- $\forall v \in V \setminus \{S, T\} \sum_{(u,v) \in E} f_{uv} = 0$

Определение остаточной сети я не дам.

Укажите количество ребер с ненулевой пропускной способностью в остаточной сети для следующего графа (более формально: укажите количество пар (u, v) таких, что $c'_{uv} > 0$, где c'_{uv} — пропускная способность ориентированного ребра (u, v) в остаточной сети)



Пример ответа: 42

Задача S. О топ-7 смешных фактах про графы

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

В очередной раз проходя по аудитории после занятия (на этот раз это были «Графы 11»), Герман и Денис обнаружили бумажку, на которой был файл «Топ-7 смешных фактов про графы.mp4». В нём были перечислены некоторые факты про графы. От вас требуется выписать какие из них являются верными. Вот вам факты:

- a Алгоритм Бугатти-Видяева асимптотически лучше алгоритма Форда-Фалкерсона.
- b Если в двудольном графе добавить исток и сток, провести ребра из истока в вершины левой доли, из вершин правой доли в сток, ребра между долями ориентировать от левой доли к правой и назначить всем ребрам пропускную способность 1, то, найдя решение задачи о максимальном потоке в полученной сети и выбрав ребра между долями, через которые течет ненулевой поток, получится решение задачи о максимальном паросочетании.
- c Величина максимального потока в сети всегда равна величине минимального разреза между истоком и стоком.
- d Если граф не является плотным (то есть $E = o(V^2)$ — обратите внимание на о-малое), то для поиска кратчайшего пути между всеми парами вершин алгоритм Флойда, всё ещё, является асимптотически оптимальным.
- e Алгоритм Форда-Фалкерсона является полиномиальным от размера входных данных.
- f Алгоритм Форда-Фалкерсона с масштабированием является полиномиальным от размера входных данных.
- g Алгоритм Диница асимптотически лучше алгоритма Эдмонса-Карпа, если $E = \omega(V)$ (если рёбер асимптотически больше чем вершин), и вообще всегда асимптотически не хуже (в связном графе).

Выведите буквы с правильными фактами через пробел в алфавитном порядке. Пример ответа: a b c g

Задача Т. О линейности

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Решите систему

- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
- $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 24$
- $4x_2 + x_3 \leq 9$
- $5x_1 + 8x_2 \leq 14$
- $6x_1 + 12x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$

Подсказка: при ограничениях

- $y_1, y_2, y_3 \geq 0$
- $2y_1 + 10y_3 \geq 12$
- $2y_1 + 4y_2 + 8y_3 \geq 12$
- $9y_1 + 3y_2 \geq 12$
- $48y_1 + 18y_2 + 28y_3 \rightarrow \min$

оптимальным значением является 92