

## Задача 01. О спусках и вершинах

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Рассмотрим стандартное дерево отрезков, решающее задачу RSQ (с изменением в точке), построенное над массиве размера  $2^{90}$  (то есть в гипотетической задаче  $n = 1237940039285380274899124224 = 2^{90}$ ) и написанное так, чтобы заходить только в вершины, у которых отрезок (который ей соответствует) пересекается с отрезком запроса. К нему сделали запрос суммы на полуинтервале  $[1; 2^{90} - 1)$  (считайте, что нумерация элементов в массиве сразу с 0). Сколько вершин будет посещено при выполнении запроса?

## Задача 02. О взятиях по модулю

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Рассмотрим классический расширенный алгоритм Евклида (который переходит от пары  $(a, b)$  к паре  $(b\%a, a)$  и останавливается, когда  $a = 0$ ). Сколько операций взятия по модулю он сделает если запустить его от чисел 228 и 282 (именно в таком порядке)?

## Задача 03. О функции

Имя входного файла: стандартный ввод  
Имя выходного файла: стандартный вывод  
Ограничение по времени: 1 секунда  
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Рассмотрим функцию  $d_2(n) = \sum_{d|n} d^2$ , ( $d|n$  значит " $d$  делит  $n$ "). Пусть  $n = 7 \cdot 29 \cdot 121 \cdot 512 \cdot 43 \cdot 5^5 \cdot 169 \cdot (10^9 + 9)^{15}$ , найдите  $d_2(n) \bmod 14763$

## Задача 04. O(x как просто)

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Вас попросили решить в точности следующую задачу: "дано натуральное число  $n$ , выведите  $n$ -ое число Фибоначчи". Вы написали на языке программирования Python 3 следующий код (если вы не знаете данный язык, просто прочитайте написанный код, как будто он написан на английском, все так и делают; можете представлять, что `range(x)` возвращает список чисел  $0, 1, 2, \dots, x - 1$ , но в данном коде используется просто чтобы провести  $n - 1$  итерацию цикла):

```
f0 = 0
f1 = 1
for i in range(n-1):
    f2 = f1 + f0
    f0 = f1
    f1 = f2
print(f1)
```

За какую асимптотику по времени он работает?

Варианты:

- a  $\Theta(n)$
- b  $\Theta(n \log n)$
- c  $\Theta(n \log^2 n)$
- d  $\Theta(n^2)$
- e  $\Theta(n^2 \log n)$
- f  $\Theta(n^3)$
- g  $\Theta(n^3 \log n)$

Выведите одну строчную английскую букву: номер верного варианта.

## Задача 05. О открытой адресации

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Реализована хеш-таблица с открытой адресацией. Изначально закольцованный буфер (нумерующийся с 0) имеет размер 16, при этом он удваивается каждый раз, когда буфер оказывается заполнен хотя бы на половину. На текущий момент в ячейках под номерами 14, 15 и 0 лежат различные элементы  $a, b, c$  соответственно (при этом  $h(a) = h(b) = h(c) = 14$ ).

Приходит два запроса: удалить элемент  $b$ , а затем добавить  $d$  ( $h(d) = 15$ ). На какой позиции будет сохранен элемент  $d$ ?

## Задача 06. О пути великого математика

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Предположим, что вы написали алгоритм поиска Эйлера цикла, используя `dfs`, списки смежности на векторах, расставляя пометки об удалении рёбер, но не удаляя их явно и не используя массивы для неявного удаления, аналогичные `ptr`, `first_unseen`, `first_not_deleted` и подобные. То есть ваш обход выглядит примерно так:

```
void dfs(int v, int p = -1) {
    for (auto& edge : g[v]) {
        if (edge.to == p) continue;
        if (edge_deleted[edge.id]) continue;
        edge_deleted[edge.id] = true;
        dfs(edge.to, v);
    }
    std::cout << v << " ";
}
```

При этом граф связный, но может быть абсолютно любым, в том числе содержать кратные рёбра и петли. За какую асимптотику отработает ваш код в худшем случае?

- a  $O(n + m)$
- b  $O(m\sqrt{m})$
- c  $O(nm)$
- d  $O(m^2)$
- e  $O(nm^2)$

В качестве ответа выпишите **одну из букв соответствующую наиболее точной оценке, а также число**. В качестве числа в ответе выводится следующее:

- Если существует константа  $n$ , что при любом фиксированном  $m$  достигается выбранная наиболее точная оценка, то вы должны вывести наименьшее такое натуральное число  $n$ .
- Если же такого числа не существует, то есть в наихудшем случае  $n$  в тесте должно зависеть от  $m$ , то выведите 0

Примеры:

- Вы считаете, что асимптотика работы в худшем случае —  $O(n + m)$ , при этом умеете строить тест на 6 вершинах, где для любого  $m$  данная оценка достигается. Тогда вы должны вывести **a 6**
- Вы считаете, что асимптотика работы в худшем случае —  $O(m\sqrt{m})$ , при этом вы знаете как строить тест где  $n = \Theta(\log m)$  при любом  $m$ , лучше не умеете и считаете что это верно. Тогда вы должны вывести **b 0**

## Задача 07. O м(а)ск(ах)

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Предположим, вам для решения задачи понадобилось перебрать все двоичные маски длины  $n$ , для каждой маски все её подмаски, а для каждой подмаски  $submask$  её разбиение (дизъюнктивное объединение) на две подподмаски  $submask_1, submask_2$  :  $submask_1 | submask_2 = submask, submask_1 \& submask_2 = 0$ . За какую асимптотику отработает оптимально написанный перебор?

В качестве ответа впишите математическую формулу  $expr$ , такую, что оптимальный код перебора работает за  $\Theta(expr)$ , причем  $expr$  состоит из чисел, знаков  $+, -, /, *, ^$  (последнее соответствует возведению в степень), открывающей и закрывающей круглых скобок и переменной  $n$  (ее смысл описан в начале условия). **Формула должна быть корректной и при этом состоять из наименьшего числа символов; обязательно писать ее без пробелов.** То есть, гипотетически выбирая между  $(2+2)+2$  и  $2+2+2$  вы должны написать второе выражение (а на самом деле в таком случае вы должны были бы написать просто 6)

## Задача 08. Об эвристиках

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Предположим, вы написали структуру данных **Система непересекающихся множеств**. Вы не использовали эвристику сжатия путей, а в эвристике по рангу, вместо сравнения размеров, в качестве нового корня выбираете случайный из двух. То есть вместо

```
if (size[a] < size[b])  
    std::swap(a, b)
```

в функции объединения множеств `unite(a, b)` вы написали следующее:

```
if (rand() % 2)  
    std::swap(a, b)
```

За какую асимптотику в худшем случае в среднем (среди всех вариантов того, какой результат вызовов `rand()`) будет работать запрос `get(u)`, возвращающий представителя множества, содержащего вершину  $u$ ? Простыми словами: если вы знаете что ваш оппонент использовал код выше, какого наилучшего времени работы (с поправкой на случайность) вы можете добиться от кода, сделав запрос?

- a  $O(\alpha(n))$
- b  $O(\log^* n)$
- c  $O(\log n)$
- d  $O(\sqrt{n})$
- e  $O(n)$
- f  $O(n \log n)$

В качестве ответа выпишите одну букву, соответствующую наиболее точной оценке времени работы функции `get`. Считайте, что функция `rand()` возвращает равномерно любое целое число от 0 до 65535.



## Задача 09. О поисках

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

На массиве из  $n$  элементов запустили следующие поиски:

1. Тернарный поиск с золотым сечением.
2. Бинарный поиск.
3. Тернарный поиск с отступами на  $\frac{1}{3}$  длины отрезка от краев.
4. Тернарный поиск со взятием двух соседних точек у середины отрезка.

Считайте, что поиски применяются в разных задачах, интересует лишь количество вычислений  $f(x)$ , где  $x$  — индекс элемент массива.

Без пробелов выведите четыре цифры — от самого быстрого к самому медленному. Пример ответа: 1234

## Задача 10. О пересечениях выпуклых многоугольников

Имя входного файла: стандартный ввод  
Имя выходного файла: стандартный вывод  
Ограничение по времени: 1 секунда  
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Какое максимальное количество точек пересечения может быть у двух выпуклых 2023-угольников?

## Задача 11. Об углях

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

На плоскости есть две прямые, заданные уравнениями:

$$\frac{20}{29}x + \frac{21}{29}y + 17 = 0$$

И

$$\frac{45}{53}x + \frac{28}{53}y + 38 = 0$$

В ответ запишите три **целых** числа, разделенных пробелом:  $A$   $B$   $C$  таких, что уравнение  $Ax + By + C = 0$  задаёт прямую-биссектрису **острого** угла, образованного пересечением первых двух прямых. Кроме этого, числа  $A$  и  $B$  **обязательно** должны быть взаимно просты, то есть  $\text{НОД}(A, B) = 1$  и **при всём этом**  $A > 0$ . Гарантируется, что такая прямая существует.

## Задача 12. О взломе хеша

Имя входного файла: стандартный ввод  
Имя выходного файла: стандартный вывод  
Ограничение по времени: 1 секунда  
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Дана бесконечная строка Туэ-Морса (символы нумеруются с нуля, нулевым символом является  $a$ ). Выведите подстроку данной строки, находящейся с  $2^{337}$  символа до  $2^{337} + 9$  символа включительно.

Пример ответа: *aaaaabbbbb*.

## Задача 13. О деревьях

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

На какие из этих запросов можно отвечать с помощью классического дерева отрезков с массовыми операциями за  $O(\log n)$ ? Считайте, что все операции можно выполнять по модулю (или что переполнения не бывает).

- a Прибавление числа на отрезке и сумма на отрезке
- b Прибавление числа на отрезке и произведение на отрезке
- c Прибавление произвольной арифметической прогрессии на отрезке и сумма на отрезке
- d Прибавление произвольной геометрической прогрессии на отрезке и сумма на отрезке
- e Умножение на число на отрезке и сумма на отрезке
- f Умножение на число на отрезке и произведение на отрезке

Выведите буквы через пробел в порядке возрастания. Пример ответа: «b d f»

## Задача 14. О строках

Имя входного файла: стандартный ввод  
Имя выходного файла: стандартный вывод  
Ограничение по времени: 1 секунда  
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Дана строка `abacabacabab`.

Через пробел выведите значения  $z$  и  $\pi$ -функций данной строки. Полагайте, что  $z_0 = \pi_0 = 0$ .

Пример ответа: «0101010101 012312345673».

## Задача 15. О пересечении прямых

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Две прямые заданы двумя точками. Каждая координата каждой точки является целым числом и лежит в отрезке от  $-10$  до  $10$ . Известно, что прямые пересекаются. Какое максимальное значение может принять  $x$ -координата точки пересечения прямых?