

Задача 01. О спусках и вершинах

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Рассмотрим стандартное дерево отрезков, решающее задачу RSQ (с изменением в точке), построенное над массиве размера 4096 (то есть в гипотетической задаче $n = 4096$) и написанное так, чтобы заходить только в вершины, у которых отрезок (который ей соответствует) пересекается с отрезком запроса. К нему сделали запрос суммы на полуинтервале $[1; 4095)$ (считайте, что нумерация элементов в массиве сразу с 0). Сколько вершин будет посещено при выполнении запроса?

Задача 02. О взятиях по модулю

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Рассмотрим классический расширенный алгоритм Евклида. Сколько операций взятия по модулю он сделает если запустить его от чисел 228 и 282?

Задача 03. О функции

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Рассмотрим функцию $d_2(n) = \sum_{d|n} d^2$, ($d|n$ значит " d делит n "). Пусть $n = 16 \cdot 121 \cdot 49 \cdot 43 \cdot 5^5 \cdot 169 \cdot (10^9 + 7)^{15}$, найдите $d_2(n) \bmod 14763$

Задача 04. O(x как просто)

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Вас попросили решить следующую задачу: "дано число n , выведите n -ое число Фибоначчи". Вы написали код вида:

```
f0=0
f1=1
for i in range(n-1):
    f2 = f1 + f0
    f0 = f1
    f1 = f2
print(f1)
```

За какую асимптотику он работает?

Варианты:

- a $\Theta(n)$
- b $\Theta(n \log n)$
- c $\Theta(n \log^2 n)$
- d $\Theta(n^2)$
- e $\Theta(n^2 \log n)$
- f $\Theta(n^3)$
- g $\Theta(n^3 \log n)$

Выведите одну строчную английскую букву: номер верного варианта.

Задача 05. Ом(а)ск(ах)

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Предположим, вам для решения задачи понадобилось перебрать все двоичные маски длины 2^n , для каждой маски все её подмаски, а для каждой подмаски $submask$ её разбиение (дизъюнктивное объединение) на две подподмаски $submask_1, submask_2$: $submask_1 | submask_2 = submask, submask_1 \& submask_2 = 0$. За какую асимптотику отработает оптимально написанный перебор?

В качестве ответа впишите математическую формулу $expr$, такую, что оптимальный код перебора работает за $\Theta(expr)$, причем $expr$ состоит из чисел, знаков $+, -, /, *, ^$ (последнее соответствует возведению в степень), открывающей и закрывающей круглых скобок и переменной n (ее значение дано в начале условия). **Формула должна быть корректной и при этом состоять из наименьшего числа символов; обязательно писать ее без пробелов.** То есть, гипотетически выбирая между $(2+2)+2$ и $2+2+2$ вы должны написать второе выражение (а на самом деле в таком случае вы должны были бы написать просто 6)

Задача 06. Об эвристиках

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Предположим, вы написали Систему непересекающихся множеств. Вы не использовали эвристику сжатия путей, а в эвристике по рангу вместо сравнения размеров выбираете в качестве нового корня выбираете случайный из двух. То есть вместо

```
if (size[a] < size[b])  
    std::swap(a, b)
```

в функции объединения множеств `unite(a, b)` вы написали следующее:

```
if (rand() % 2)  
    std::swap(a, b)
```

За какую асимптотику в худшем случае работать запрос `get(u)`, возвращающий представителя множества, содержащего вершину u ?

- a $O(\alpha(n))$
- b $O(\log^* n)$
- c $O(\log n)$
- d $O(\sqrt{n})$
- e $O(n)$
- f $O(n \log n)$

В качестве ответа выпишите одну букву, соответствующую наиболее точной оценке времени работы функции `get`.

Задача 07. О пути великого математика

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Предположим, что вы написали алгоритм поиска Эйлера цикла, используя `dfs`, списки смежности на векторах, расставляя пометки об удалении рёбер, но не удаляя их явно и не используя массивы аналогичные `ptr`, `first_unseen`, `first_not_deleted` и аналогичные. То есть ваш обход выглядит примерно так:

```
void dfs(int v, int p = -1) {
    for (auto& edge : g[v]) {
        if (edge.to == p) continue;
        edge_deleted[edge.id] = true;
        dfs(edge.to, v);
    }
    std::cout << v << " ";
}
```

При этом граф связный, но может быть абсолютно любым, в том числе содержать кратные рёбра и петли. За какую асимптотику отработает ваш код в худшем случае?

- a $O(n + m)$
- b $O(m\sqrt{m})$
- c $O(nm)$
- d $O(m^2)$
- e $O(nm^2)$

В качестве ответа выпишите **одну из букв соответствующую наиболее точной оценке, а также число**. В качестве числа в ответе выводится следующее:

1. Если при любом фиксированном m , существует константа n при которой достигается наиболее точная оценка, то вы должны вывести наименьшее такое натуральное число.
2. Если же такого числа не существует, то есть в наихудшем случае n в тесте должно зависеть от m , то выведите 0

Примеры:

1. Вы считаете, что асимптотика работы в худшем случае — $O(n + m)$, при этом умеете строить тест на 6 вершинах, где для любого m данная оценка достигается. Тогда вы должны вывести **a 6**
2. Вы считаете, что асимптотика работы в худшем случае — $O(m\sqrt{m})$, при этом вы знаете как строить тест где $n = O(\log m)$ при любом m , лучше не умеете и считаете что это верно. Тогда вы должны вывести **b 0**

Задача 08. О открытой адресации

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Реализована хеш-таблица с открытой адресацией. Изначально закольцованный буфер имеет размер 16, при этом он удваивается каждый раз, когда буфер оказывается заполнен хотя бы на половину. На текущий момент в ячейках под номерами 0, 1 и 2 лежат различные элементы a, b, c соответственно (при этом $h(a) = h(b) = h(c) = 0$).

Приходит два запроса: удалить элемент b , а затем добавить d ($h(d) = 0$). На какой позиции будет сохранен элемент d ?

Задача 09. О пересечениях выпуклых многоугольников

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Какое максимальное количество точек пересечения может быть у двух выпуклых 2022-угольников?

Задача 10. О взломе хеша

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Дана бесконечная строка Туэ-Морса (символы нумеруются с нуля, нулевым символом является a). Выведите подстроку данной строки, находящейся с 2^{53} символа до $2^{53} + 7$ символа.
Пример ответа: *aaaabbbb*.

Задача 11. О возведении матрицы в степень

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Динамика вида

$$\begin{aligned}a_{i+1} &= a_i + 2a_{i-1} \\ b_{i+1} &= 3a_i + 4a_{i-1} + 5b_i + 9c_i \\ c_{i+1} &= 6b_i + 7b_{i-1} + 8c_i\end{aligned}$$

была оптимизирована с помощью возведения матрицы в степень.

Матрица перехода A устроена таким образом, что

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_i \\ a_{i-1} \\ b_i \\ b_{i-1} \\ c_i \\ c_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ a_i \\ b_{i+1} \\ b_i \\ c_{i+1} \\ c_i \end{pmatrix}$$

Выведите через пробел $A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}, A_{35}, A_{36}$

Задача 12. О поисках

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

На массиве из n элементов запустили следующие поиски:

1. Бинарный поиск.
2. Тернарный поиск с отступами на $\frac{1}{3}$ длины отрезка от краев.
3. Тернарный поиск с золотым сечением.
4. Тернарный поиск со взятием двух соседних точек у середины отрезка.

Считайте, что поиски применяются в разных задачах, интересует лишь количество вычислений $f(x)$, где x — индекс элемент массива.

Без пробелов выведите четыре цифры — от самого быстрого к самому медленному. Пример ответа: 1234

Задача 13. О пересечении прямых

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Две прямые заданы двумя точками. Каждая координата каждой точки является целым числом и лежит в отрезке от -10 до 10 . Известно, что прямые пересекаются. Какое максимальное значение может принять x -координата точки пересечения прямых?

Задача 14. О строках

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Дана строка `abacabacabab`.

Через пробел выведите значения z и π -функций данной строки. Полагайте, что $z_0 = \pi_0 = 0$.

Пример ответа: «010101010101 012312345673».

Задача 15. О деревьях

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

На какие из этих запросов можно отвечать с помощью классического дерева отрезков с массовыми операциями за $O(\log n)$? Считайте, что все операции можно выполнять по модулю (или что переполнения не бывает).

- a Прибавление числа на отрезке и сумма на отрезке
- b Прибавление числа на отрезке и произведение на отрезке
- c Умножение на число на отрезке и сумма на отрезке
- d Умножение на число на отрезке и произведение на отрезке
- e Прибавление произвольной арифметической прогрессии на отрезке и сумма на отрезке
- f Прибавление произвольной геометрической прогрессии на отрезке и сумма на отрезке

Выведите буквы через пробел в порядке возрастания. Пример ответа: «b d f»