

Декартово дерево

Задача 1. Дан массив. Постройте на нём декартово дерево за $O(N)$.

Задача 2. Вставлять в строку символы и говорить, является ли подстрока палиндромом за $O(\log N)$

Задача 3. Дан массив из N чисел. Сделать предподсчёт за $O(N \log N)$, чтобы отвечать за $O(\log^2 N)$ на запросы

- изменить число на позиции;
- «количество чисел на отрезке $[l; r]$, лежащих в отрезке $[x; y]$ »;

Подумайте, как сделать это с деревом отрезков, если все запросы известны заранее.

Задача 4. Выполнять за $O(\log N)$ запросы к массиву из 0 и 1:

- Говорить длину максимального подотрезка одинаковых
- Применять $a_i = a_i \oplus 1$ на отрезке (это ксор)
- Развернуть подотрезок
- Отсортировать подотрезок

Задача 5. Выполнять за $O(\log N)$ запросы к массиву:

- Говорить сумму чисел в массиве
- Перемещать кусок массива в конец
- Применять $a_i = \min(a_i, x)$ на отрезке
- Прибавить x на отрезке

Задача 6. Выполнять за $O(\log^2 N)$ запросы к массиву:

- Делать циклический сдвиг на 1 подотрезка массива
- Найти количество элементов на отрезке, равных x

Задача 7. Повторение. Как делать задачи 3-6 с помощью корневой декомпозиции?

Задача 8. Дан массив и два указателя в нём: левый и правый. Левый всегда будет левее правого. Выполняйте за $O(\log N)$ запросы к массиву:

- Разворачивать подотрезок от левого до правого указателя
- Сдвинуть любой указатель в любую сторону на 1
- Говорить, на какой элемент массива указывает каждый указатель.

Теперь сделайте эти запросы за $O(1)$.

Задача 9. Даны две последовательности длины N , найти сумму (по известному модулю) по всем непустым подмножествам индексов произведений максимумов по этим индексам:

$$\sum_{S \subseteq \{1 \dots N\}} \max_{i \in S} A_i \cdot \max_{i \in S} B_i$$

за $O(N \log N)$. Перейдите к дереву отрезков.