Динамика 1

Если где-то написано посчитать и ответ получается явно огромный, то мы делаем это по заранее известному простому модулю.

Задача 1. Надо K конфет распределить между N детьми, причём i-му ребёнку можно давать не больше a_i конфет. Решить за $\mathcal{O}(NK)$.

Задача 2. Дано бревно длины L, на нём есть N засечек с координатами $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < L$. Пилить можно только там, где есть засечки. За распил куска платим его длину. Распилить бревно на $N+1$ часть за минимальную стоимость. Сложность $\mathcal{O}(N^3)$.

Задача 3. Вдоль прямой расставлены N объектов. Объекты расставлены на координатах $x_1, \ldots, x_N$. Надо убрать $M (0 \leq M \leq N-2)$ объектов, что:

1. первый и последний объекты должны остаться на своих местах
2. максимальное расстояние между последовательными объектами должно быть как можно меньше

Решить за $\mathcal{O}(N^3)$.

Задача 4. На листке записано в одну строку N целых положительных чисел. Играют двое. За каждый ход можно зачеркивать крайнее число либо слева, либо справа. Зачеркнутое число добавляется к очкам игрока. N — четное. Игру начинает первый игрок. Необходимо вывести максимально возможную сумму очков для первого игрока при условии, что противник играет наилучшим образом. $\mathcal{O}(N^2)$.

Задача 5. Для заданного числа K слово называется почти палиндромом, если в нем можно изменить не более K любых букв так, чтобы получился палиндром. Требуется для данного числа K определить, сколько подслов данного слова S ($|S| = N$) являются почти палиндромами. Решить задачу за ($\mathcal{O}(N^2)$)

Задача 6. Последовательность называется пилообразной, если каждый её элемент является локальным экстремумом, то есть либо меньше всех своих соседей, либо больше. Найдите количество пилообразных

a) последовательностей с элементами, не превосходящими N за время $\mathcal{O}(N^3)$.
b) перестановок за время $\mathcal{O}(N^3)$.
c) перестановок за время $\mathcal{O}(N^2)$.

Задача 7. Дана строка длины N. За одно действие разрешается выбрать любую подстроку, являющуюся палиндромом и вырезать её из строки (оставшиеся символы сдвигаются). Найти минимальное количество действий, необходимое для уничтожения всей строки за время $\mathcal{O}(N^3)$.

Задача 8. На компьютере есть 3 кнопки: 0, 1 и $\leftarrow$. Кнопки 0 и 1 печатают то, что на них написано. Кнопка $\leftarrow$ стирает последний напечатанный, а если его нет то не делает ничего. Дана строка длины M. Сколько есть способов сделать ровно N нажатий и получить эту строку? Считаем $N \geq M$.

a) За время $\mathcal{O}(N^3)$.
b) Осторожно, идейный подпункт. За время $\mathcal{O}(N^2)$.

Задача 9. Домножить все числа какого-то подотрезка массива на данный X чтобы максимизировать максимальную сумму на подотрезке среди всех подотрезков за $\mathcal{O}(N)$.

Задача 10. Два способа разбить людей на группы считаются разными если в одном способе кто-то в одной группе, а в дргуом способе в разных.

a) Сколько есть способов разбить N людей на K групп? Посчитать за $\mathcal{O}(NK)$.

b) Пусть, $F(i)$ это количество групп размера i в каком-то разбиении. Сколько есть способов разбить N людей на группы размеров от A до B, и чтобы для всех размеров i выполнялось $F(i) = 0$ или $X \leq F(i) \leq Y$? Посчитать за $\mathcal{O}(N^3)$. Понять почему это $\mathcal{O}(N^2 \log N)$.