

## Динамическое программирование 1

**Задача 1.** Найти количество правильных скобочных последовательностей из  $n$  открывающих скобок, таких что максимальная глубина вложенности скобок равна в точности  $k$ . Сложность  $O(nk)$ .

**Задача 2.** Дано бревно длины  $L$ , на нём есть  $n$  засечек с координатами  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < L$ . Пилить можно только там, где есть засечки. За распил куска платим его длину. Распилить бревно на  $n + 1$  часть за минимальную стоимость. Сложность  $O(n^3)$ .

**Задача 3.** Домножить подотрезок массива на  $x$  чтобы максимизировать максимальную сумму подмассива.  $O(n)$ .

**Задача 4.** Перестановка называется пилообразной, если каждый её элемент является локальным экстремумом, то есть либо меньше всех своих соседей, либо больше. Найдите количество пилообразных перестановок длины  $n$  по модулю  $10^9 + 7$ .

- а) За время  $O(n^3)$ .
- б) За время  $O(n^2)$ .

**Задача 5.** Дана строка  $s$  длины  $n$ . За одно действие разрешается выбрать любую подстроку, являющуюся палиндромом и вырезать её из строки (оставшиеся символы сдвигаются). Найти минимальное количество действий, необходимое для уничтожения всей строки за время  $O(n^3)$ .

**Задача 6.**  $n$  человек попали в яму глубины  $A$ . Известно, что высота  $i$ -го человека равна  $h_i$ , а длина рук  $l_i$ . Люди могут становиться друг другу на плечи произвольным образом. Человек может вылезти из ямы, если суммарный рост всех кто стоит под ним, сложенный с его ростом и длиной его рук больше либо равен глубине ямы. После того как человек вылезает из ямы, он никак не помогает оставшимся. Сколько максимум людей смогут выбраться? Решите задачу за время  $O(n^2)$ .

**Задача 7.** Дано обычное дерево на  $n$  вершинах. Надо найти одно число – сумму расстояний между каждой парой вершин.  $O(n)$

**Задача 8.** Предыдущая задача, но на рёбрах есть веса. Та же асимптотика.

**Задача 9.** Предыдущая задача, но надо найти не сумму всех расстояний, а для каждой вершины посчитать сумму расстояний до неё от каждой другой вершины. Та же асимптотика.

**Задача 10.** Дано дерево на  $n$  вершинах, в каждой вершине записано по числу  $a_i$ . Требуется выбрать подмножество вершин с максимальной суммой  $a_i$ , чтобы никакие две соседние вершины не лежали одновременно в этом подмножестве.  $O(n)$

**Задача 11.** Найти пару максимально удалённых друг от друга вершин за  $O(n)$ .

**Задача 12.** В очередь выстроены  $n$  людей, на  $i$ -го человека надета шляпа с числом  $a_i$ , но он хочет, чтобы на нем была надета шляпа с числом  $b_i$  (не гарантируется, что такая шляпа есть у кого-то еще). Следующий процесс повторяется  $n - 1$  раз: первый человек в очереди может поменяться шляпой со вторым и уйти, либо просто уйти. Пусть, в итоге человек номер  $i$  ушел в шляпе со значением  $c_i$ . Минимизируйте сумму  $|b_i - c_i|$  по всем  $i$ .

- а) За  $O(n^2)$
- б) За  $O(n \log n)$

**Задача 13.** Сколько есть последовательностей длины  $n$  последовательностей длин от 1 до  $n$  чисел от 1 до  $k$ , что каждая последовательность — подпоследовательность следующей и лексикографически меньше ее. Например, при  $n = 3, k = 4$  подходит  $(2), (2, 4), (3, 2, 4)$ .

- а)  $O(n^2 k^2)$
- б)  $O(n^2 k)$

**Задача 14.** Построить связный граф, чтобы на пути между  $k$  парами вершин был мост.  $O(k^2)$