Дерево отрезков 2

Задача 1. Предложите, как с помощью структуры дерева отрезков выполнять следующие операции с последовательностью $a_1, a_2, \dots, a_n$:

- Изменить значение i-го элемента на x за $\mathcal{O}(\log n)$.
- Узнать сумму всех чисел на отрезке с l по r за время $\mathcal{O}(\log(r - l + 1))$.

Задача 2. На плоскости даны N точек с положительными координатами. Гарантируется, что x-координаты точек попарно различны и не существует двух точек, коллинеарных с началом координат. Для каждой точки с координатами (x, y) рассмотрим прямоугольный треугольник с вершинами в самой точке: (x, y); начале координат: $(0, 0)$; проекции точки на ось Ox: $(x, 0)$.

Для каждого из таких треугольников посчитайте, сколько из оставшихся $N-1$ точек он содержит внутри себя. $\mathcal{O}(n \log n)$.

Задача 3. Дана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ и q двумерных запросов «сколько чисел в интервале от x до y находятся на отрезке с l по r?». Считая, что все запросы даны заранее, найдите на них ответы за время $\mathcal{O}((n + q) \log n)$, используя $\mathcal{O}(n + q)$ дополнительной памяти.

Задача 4 (Объеденение прямоугольников)**.** Дан прямоугольник $L \times L$, в нём даны n прямоугольников. Найти их площадь объединения за:
a) $\mathcal{O}(n \log L + n \log n)$
a) $\mathcal{O}(n \log n)$

Задача 5. Даны n прямоугольников. Найти точку, покрытую максимальным числом из них за $\mathcal{O}(n \log n)$.

Задача 6 (k-я порядковая на отрезке)**.** Дан массив, состоящий из n элементов. Требуется выполнить какой-то предподсчёт за $\mathcal{O}(n \log n)$, а затем отвечать на запрос «k-е в порядке сортировки число на отрезке $[l; r]$». Запрос сделать за:
a) $\mathcal{O}(\log^2(n))$.
b) $\mathcal{O}(\log(n))$.

Задача 7. Дан массив, состоящий из n элементов. Требуется выполнить какой-то предподсчёт за $\mathcal{O}(n \log n)$, а затем отвечать на запрос «минимальное r, такое, что на отрезке $[l; r]$ ровно k различных чисел». Запрос сделать за:
a) $\mathcal{O}(\log^2(n))$.
b) $\mathcal{O}(\log(n))$.

Задача 8. В экспрессе s мест, пронумерованных от 1 до s. Известны уже проданные билеты в направлении от станции 1 к станции n и необходимо отвечать на запросы, возможно ли продать билет от станции a до станции b, и, если это возможно, выдавать наименьший номер свободного места на всех перегонах между a и b.

Задача 9. Дан лес (набор деревьев) на сетке из n вершин. Требуется ответить на n запросов о количестве компонент связности в прямоугольнике l_1, r_1, l_2, r_2. Решить задачу за $\mathcal{O}(n \log n)$

Задача 10. Дано два дерева на n вершинах. Найти кол-во пар v, u, что v — предок u в обоих деревьях за $\mathcal{O}(n \log n)$.

Задача 11. Дана перестановка длины n и число k ($1 \leqslant k \leqslant n$). Требуется для каждого i от 1 до $n - k + 1$ вывести длину НВП подпоследовательности a_1, a_2, …, a_{i-1}, a_{i+k}, …, a_n. Иными словами, нужно посчитать НВП от остатка для каждого способа вырезать непрерывный подотрезок из k элементов. Асимптотика: $\mathcal{O}(n \log n)$.