

1. Знаменитая задача о шляпах. В очередь выстроены n людей, на каждого надета шляпа со значением a_i , и у каждого есть желание b_i . Следующий процесс повторяется $n - 1$ раз: первый человек в очереди может поменяться шляпой со следующим и уйти, либо просто уйти. Пусть, в итоге у каждого надета шляпа со значением c_i . Необходимо минимизировать сумму $|b_i - c_i|$

- a) За $O(n^2)$
- b) За $O(n \log n)$

2. Дано множество из n окружностей на плоскости. Найдите точку, покрытую максимальным числом окружностей, за время:

- a) $O(n^3)$
- b) $O(n^2 \log n)$

3. Даны n точек на плоскости, необходимо найти три точки из множества такие, что треугольник, образованный этими точками имеет максимальную площадь. Сложность $O(n^2)$.

4. На двумерной плоскости даны n точек, предложите алгоритм со сложностью $O(n \log n)$, который бы сортировал эти точки, таким образом, что при обходе отсортированной последовательности точек, получалась бы простая замкнутая ломаная без самопересечений.

5. На плоскости даны N точек с положительными координатами. Гарантируется, что x -координаты точек попарно различны и не существует двух точек, коллинеарных с началом координат. Для каждой точки с координатами (x, y) рассмотрим прямоугольный треугольник с вершинами в самой точке: (x, y) ; начале координат: $(0, 0)$; проекции точки на ось Ox : $(x, 0)$.

Для каждого из таких треугольников посчитайте, сколько из оставшихся $N - 1$ точек он содержит внутри себя. $O(n \log n)$.

6. Компания друзей захотела сделать заготовки для пельменей из огромного прямоугольного куска теста. Для этого в ход пошли всевозможные предметы округлой формы: стаканы, кружки, кастрюли. . . В итоге тесто было разделено n возможно пересекающимися окружностями произвольных радиусов и центров. Нам интересно посчитать, сколько получилось заготовок, то есть на сколько кусков распалось тесто.

7. Есть трасса, состоящая из 2 участков, а так же есть n спортсменов. Для каждого спортсмена известна его скорость на первом участке и его скорость на втором участке v_i и u_i соответственно. Для каждого спортсмена определить, можно ли так подобрать длины 2 участков, что если все n спортсменов побегут одновременно, то заданный спортсмен победит. $O(n \log n)$.

— — —

8. Даны две замкнутые ломаные без самопересечений. Определите, можно ли перевести их друг в друга с помощью параллельного переноса, поворотов и гомотетии.

9. Дана бинарная строка s и какая-то строка t . Все нули в строке s заменяются на какую-то строку r_0 , все единицы – на какую-то строку r_1 . Требуется найти количество таких пар строк r_0 и r_1 , что в результате применения описанного выше процесса получается строка t . $O(n \log n)$.

10. Дана строка из 10^5 символов латинского алфавита. Обезьяна нажимает случайные клавиши на клавиатуре (одну из 26 букв), пока не наберёт её целиком, то есть пока исходная подстрока не станет подстрокой набранной строки.

Какое ожидание числа нажатых клавиш, перед тем, как это произойдёт?

11. Вам заданы несколько запрещённых слов из букв латинского алфавита, суммарная длина которых не превосходит 100. Требуется найти, сколько существует «хороших» (не содержащих запрещённых) слов длины $n \leq 100$, по модулю $10^9 + 7$.

— — —

12. Даны две перестановки. Требуется посчитать их наибольшую общую подпоследовательность за $O(n \log n)$

13. Дана перестановка длины n и число k ($1 \leq k < n$). Требуется для каждого i от 1 до $n - k + 1$ вывести длину НВП подпоследовательности $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+k}, \dots, a_n$. Иными словами, нужно посчитать НВП от остатка для каждого способа вырезать непрерывный подотрезок из k элементов. Асимптотика: $O(n \log n)$.

14. Даны n чисел от 1 до n , найдите медиану сумм всех подмножеств этих чисел за $O(n^3)$.

— — —

15. Дан массив, состоящий из n элементов. Требуется выполнить какой-то предподсчёт за $O(n \log n)$, а затем отвечать **online** на запрос "минимальное r , такое, что на отрезке $[l; r]$ ровно k различных чисел". Запрос сделать за:

- a) За $O(\log^3(n))$
- b) За $O(\log^2(n))$
- c) * За $O(\log(n))$

16. Изменять элемент в точке и говорить правда ли, что все числа на отрезке от l до r различны. Оба запроса за $O(\log n)$.

17. Дан массив длины n найти, в нем подотрезок, в котором произведение максимума на минимум максимально. $O(n \log n)$.

— — —

18. В турнире участвуют 1024 видов покемонов. Вы, будучи экспертом по покемонам, знаете, кто кого может победить. Иначе говоря, вам полностью известен граф-турнир из 1024 вершин и $\frac{1023 \times 1022}{2}$ рёбер, в котором каждые две вершины соединены ровно одним ориентированным ребром, определяющим победителя в возможном поединке. Обратите внимание, что из $a \rightarrow b$ и $b \rightarrow c$ не следует, что $a \rightarrow c$.

У вас есть 10 покемонов. Составьте команду из 10 покемонов такую, что для каждого из 1024 типов покемонов в вашей команде найдется покемон, побеждающий его. Считайте, что в битве одинаковых покемонов побеждает ваш.

19. Дан функциональный граф. Требуется выбрать максимальное подмножество вершин и сопоставить каждой из выбранных вершин число t_i , что если поставить в выбранные вершины шарики во времена, заданные числами t_i , при этом каждую секунду шарик переходит в следующую вершину, то описанный процесс сможет продолжаться бесконечно, на каждом шаге этого процесса не будет двух шариков в одной вершине. Решить за $O(n)$.

20. Дан граф. Разбить его на две клики. Рёбра между вершинами разных клик разрешаются. $n, m \leq 10^5$.

— — —

21. Дан бильярдный стол $W \times H$. Требуется найти количество способов так ударить по шару, находящемуся в нижнем левом угле стола, чтобы он, совершив ровно n ударов об стенку, попал в какой-нибудь из четырёх углов стола. $n \leq 10^{12}$.

22. Найдите способ посчитать $\frac{1-a^n}{1-a}$ по **произвольному** модулю за $O(\log n)$.
Подсказка: это сумма геометрической прогрессии.

23. Как умножать по модулю M порядка 10^{18} без длинной арифметики?
a) за $O(\log M)$
b) за $O(1)$

— — —

24. Дано мультимножество из n целых чисел. Найдите любое его подмножество, сумма чисел которого делится на n .

25. Даны n предметов с максимальным весом A . Набрать предметов на максимальную стоимость

- a) за $O(n + A^5)$
- b) за $O(n + A^4)$
- c) за $O(n + A^3)$

Подсказка: используйте предыдущую задачу.

26. Дан массив длины n чисел от 1 до n , доступный только для чтения. Найдите в нем два одинаковых элемента за $O(n \log^2 n)$ или определите, что таких нет. Можно использовать $O(1)$ дополнительной памяти.