Продвинутые графы

Задачи

Кратчайшие пути

Задача 1. Дан взвешенный граф на n вершинах. Веса всех вершин — вещественные числа от 1 до 2. Требуется найти кратчайшее расстояние от 1 до всех остальных вершин за $O(n + m)$.

Задача 2. a. Докажите, что алгоритм Дейкстры работает за $\mathcal{O}(2^n \cdot m)$ на графе с произвольными целочисленными.
b. Постройте пример, на котором алгоритм Дейкстры работает за $2^{\Omega(n)}$

Задача 3. Постройте пример, на котором алгоритм Форда-Беллмана с очередью работает за $\Omega(n \cdot m)$.

Задача 4. Дан граф на n вершинах, а также q запросов двух типов:

1. Добавить ребро (u, v). *Гарантируется, что граф останется ациклическим.*

2. Узнать самую далёкую от v вершину среди достижимых.

Время $\mathcal{O}((n + q) \log n)$.

Задача 5. Дан взвешенный граф на n вершинах и m рёбрах, а также заданы две пары вершин (s, t) и (v, u). Можно выбрать какой-то кратчайший путь из s в t и заменить веса всех ребёр на нём на 0. Какого минимального расстояния между v и u можно добиться? Время $\mathcal{O}(n + m \log m)$.

СНМ

Задача 6. Дан граф на n вершинах и m рёбрах, а также $q \le m$ запросов удаления рёбер. После каждого запроса необходимо узнать количество компонент связности. Время $\mathcal{O}(n + m \cdot \alpha(m, n))$.

Задача 7. Дан граф на n вершинах, а также q запросов. Каждый запрос — ребро (u, v). Если после добавления этого ребра граф является двудольным, необходимо добавить его, иначе добавлять его не нужно. Для каждого запроса узнать, было ли добавлено ребро. Время:
а) $\mathcal{O}(n + q \log n)$;
б) $\mathcal{O}(n + q \cdot \alpha(q, n))$.

Задача 8. В каждой клетке прямой записано число 0 или 1. Поступает информация: четность числа единиц на отрезке $[L_i, R_i]$, найти первый запрос, после которого данные противоречивы. Онлайн. Асимптотика $\mathcal{O}(n + q \log n)$.

Задача 9. Даны n клеток, покрашенных в цвет 0, а также q запросов покраски отрезка $[l; r]$ в цвет c. Для каждой клетки найти итоговый цвет. Время $\mathcal{O}(n + q \cdot \alpha(q, n))$.

Задача 10. Рёберным графом называется граф, в котором вершины соответствуют рёбрам в изначальном графе (и имеют тот же вес). Причём для каждой пары рёбер, смежных одной и той же вершине A начального графа, есть ребро между соответствующим им вершинам с весом равным весу A в начальном графе. Требуется за $\mathcal{O}(m \cdot \alpha(m, n))$ найти вес минимального остовного дерева в:
a) Рёберном графе
b) Рёберном графе рёберного графа

Остовы

<u>**Определение.**</u> Минимально узкое остовное дерево — остовное дерево с минимальным весом максимального по весу ребра.

Задача 11. Является ли:
а) минимальное остовное дерево минимально узким остовным деревом?
б) минимально узкое остовное дерево минимальным остовным деревом?

Задача 12. Дан взвешенный граф. Дано минимальное остовное дерево на нем. У ребра поменяли вес. Найти новое минимальное остовное дерево за $\mathcal{O}(n + m)$.

Задача 13. Найдите второе по весу остовное дерево.

Задача 14. Докажите, что максимальный вес ребра на пути между парой вершин в минимальном остове не зависит от выбора конкретного минимального остова.

Задача 15. За $\mathcal{O}(m \log n)$ сделать предпосчёт, а затем для любой пары вершин за $\mathcal{O}(\text{размера ответа})$. возвращать путь между a_i и b_i, в котором минимальный вес ребра максимален.

Задача 16. Дан взвешенный граф на n вершинах и m рёбрах, а также какой-то его остов. Проверьте, что этот остов является минимально узким. Время $\mathcal{O}(n+m)$.

Задача 17. Можно узнать сумму на подотрезке массива с i по j за c_{ij}. Выбрать такое множество отрезков, что они однозначно позволяют восстановить массив и имеют минимальную суммарную стоимость. $\mathcal{O}(n^2)$.

Задача 18. Дан взвешенный полный граф на n вершинах. Каждой вершине соответствует число $a_v \leq C$. Вес ребра (v, u) равен $a_v \oplus a_u$ (XOR). Найти минимальный остов. Время $\mathcal{O}(n \log n \log C)$.

Задача 19. Дан граф на n вершинах и m рёбрах. Для каждой вершины требуется найти суммарный вес всех рёбер минимального остова, содержащего все рёбра, смежные с данной вершиной. Время $\mathcal{O}(m \log n)$.

Задача 20. Дан взвешенный граф и какой-то остов в нём. Вершина A называется столицей, если для любой другой вершины B самое короткое ребро на пути от A до B не длиннее самого короткого ребра на пути от A до B по остову. Требуется за $O(m \log n)$ найти все столицы.

Ещё задачи

Задача 21. Дан ациклический ориентированный граф на n вершинах и m рёбрах. На каждом ребре написана какая-то буква. Найти лексикографически минимальный простой путь из вершины 1 в вершину n за время $\mathcal{O}(n + m \log n)$.

Задача 22. Дан ориентированный взвешенный граф на n вершинах и m рёбрах, веса рёбер — натуральные числа, не превосходящие C. Найти округленный вверх средний вес минимального средневзвешенного цикла за время $\mathcal{O}(nm \log C)$. Средний вес цикла — сумма весов рёбер, делённая на количество рёбер.

Задача 23. Дано m рёбер, пронумерованных от 1 до m. Ответить на q запросов: «является ли граф, образованный рёбрами подотрезка $[l; r]$, двудольным?». Время:

а) $\mathcal{O}((m+q)\sqrt{m} \log m)$;
б) $\mathcal{O}(m \log^3 m + q \log n)$;
в) $\mathcal{O}(m \log^2 m + q \log n)$