

Тинькофф А'. Деревья 2. Семинар.

Костя Амеличев, Дима Умнов, Ваня Сафонов, Алеся Иванова

09.11.2022

Задача 1. У вас есть полное взвешенное бинарное дерево глубины L с $N = 2^{L+1} - 1$ вершинами. Необходимо отвечать на два типа запросов:

1. Покрасить вершину v в черный цвет.
2. Покрасить вершину v в белый цвет.
3. Найти ближайшую к v черную вершину.

Асимптотика $O(N \cdot L \cdot \log(N))$.

— — —

Задача 2. Дано дерево на N вершинах. Найти за $O(N)$ вершину, при удалении которой все дерево распадется на поддерева размера не более $N/2$. Такая вершина называется центроидом дерева.

Задача 3. Обсудите идею центроинной декомпозиции, ее реализацию (в том числе нерекурсивную!).

Задача 4. Решите задачу 1 для произвольного дерева на N вершинах за $O(N \log^2(N))$.

Задача 5. Две вершины называются близкими, если существует путь между двумя этими вершинами длины не более l и также существует путь между ними веса не более w . Посчитайте количество пар вершин v, u ($v < u$), таких, что вершины v и u близкие. $O(N \log^2 N)$

— — —

Задача 6. Вам дано подвешенное дерево на n вершинах, вершины которого либо черные, либо белые. Даны q offline запросов (v, h) , требуется находить количество черных вершин на расстоянии h вниз от v за $O(n + q)$ суммарно.

Задача 7. Вам дано дерево на n вершинах, на каждом ребре которого написан d -мерный вектор. Заранее зафиксирован непростой модуль m . Вам поступает q online запросов с нахождением покомпонентного произведения векторов по модулю m на пути в дереве. Разрешено $O(nd)$ памяти. Отвечайте на каждый запрос за

1. $O(d \log^2 n)$
2. $O(d \log n)$

Задача 8. Решите 7-ю задачу, со следующими изменениями:

- Вычисляется покомпонентная сумма, вместо покомпонентного произведения.
- Есть запросы изменения вектора.

Все запросы должны обрабатываться за $O(d \log_f n)$, где \log_f — логарифм от использования дерева Фенвика.

Задача 9. Решите задачу, обратную предыдущей: вместо получения суммы на пути, вы прибавляете на пути. Вместо обновления в ребре, вы получаете значение на ребре. Время ответа на запрос по прежнему $O(d \log_f n)$.

Задача 10. Решите предыдущую задачу, добавив прибавление на поддереве.