Тинькофф A'. Математика 1. Семинар

Костя Амеличев, Дима Умнов, Вова Новиков, Ваня Сафонов, Алеся Иванова

26.11.2022

Задача 1.

a) Пусть есть некоторое простое p и натуральное $n < p$. Найдите обратные ко всем числам $1, 2, \ldots, n$ за время $O(n + \log p)$.

b) Как после некоторого предподсчета за время $O(n)$ считать биномиальные коэфициенты C_a^b (при $b \le a \le n$) за время $O(1)$?

Задача 2. Дан массив натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Отвечать на q запросов, каждый задается числом x.

a) Найти количество отрезков $[l, r]$, таких что $gcd(a_l, a_{l+1}, \ldots, a_r) = x$.

b) Найти количество отрезков $[l, r]$, таких что $(((a_l \, mod \, a_{l+1}) \, mod \, a_{l+2}) ... \, mod \, a_r) = x$.

Время работы должно быть $O(n \log^2 A + q)$.

Задача 3. Дано натуральное число n и натуральное нечетное число k. Проверить что у n ровно k натуральных делителей за время $O(n^{\frac{1}{4}})$.

Задача 4.

a) Даны 2 натуральных числа a и b. Вспомните алгоритм Евклида нахождения НОД чисел a и b. Если известно, что $a, b \le n$, то на каком тесте алгоритм совершит больше всего итераций?

b) Даны 2 натуральных числа a и b. Пусть $d = gcd(a, b)$. Найдите такие целые коэфициенты k_a, k_b, такие что $|k_a|, |k_b| \le max(a, b)$ и $k_a a + k_b b = d$

c) Как найти описание всех решений Диофантова уравнения $ax + by = c$, где a, b, c некоторые целые коэфициенты?

Во всех пунктах время работы должно быть $O(\log{(max(a, b))})$.

Задача 5. Китайская теорема об остатках

Пусть известно, что $x \equiv d_1 \, (mod \, m_1)$ и $x \equiv d_2 \, (mod \, m_2)$. Как найти, чему равно x по модулю $lcm(m_1, m_2)$? Вспомните, что есть не более одного такого остатка.

Задача 6. Есть 2 натуральных числа a и m, причем $gcd(a, m) = 1$. Вспомните, почему существует единственное $0 \le b < m$, такое что $ab \equiv 1 \, (mod \, m)$.

a) Как найти b, если m — простое число.

b) m — произвольное натуральное число.

Время работы $O(\log m)$.

Offtop: Как перемножать числа по модулю m за $O(1)$, если $m \le 10^{18}$?

Задача 7. Пусть есть простое число p.

a) Первообразным корнем называется любой остаток g по модулю p, такой что $g^0, g^1, \ldots, g^{p-2}$ дают различные остатки. Сделав предподсчет за $O(\sqrt{p})$ отвечать на запросы «является ли g первообразным корнем» за $O(\log^2 p)$.

Как найти любой первообразный корень с помощью этого?

b) Есть два числа a и b. Найти любое x, такое что $a^x \equiv b \, (mod \, p)$ или сказать, что таких нет. Время работы $O(\sqrt{p})$.

c) Есть 4 ненулевых остатка a, b, c, d по модулю p. Найти количество различных остатков при делении на p среди чисел $a^{k_a} b^{k_b} c^{k_c} d^{k_d}$ при всех натуральных k_a, k_b, k_c, k_d. Время работы должно быть $O(\sqrt{p})$

Задача 8. Обозначим

- $d(x)$ это количество делителей числа x
- $\sigma(x)$ это сумма делителей числа x
- $\phi(x)$ это функция Эйлера (количество чисел $\le x$, взаимно простых с x)

Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — разложение числа n на простые множители.
Найдите (или вспомните) формулы для $d(n)$, $\sigma(n)$, $\phi(n)$.

Задача 9. Есть натуральное число n.

a) Найти все простые числа от 1 до n. Какая асимптотика количества таких чисел (от n)?

b) После некоторого предподсчета осуществлять факторизацию числа $x \leq n$ за время $O(\log x)$.

c) Найти $\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n)$.
Найти $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$.
Найти $d(1), d(2), \dots, d(n)$.

1) Время работы предподсчета должно быть равно $O(n \log \log n)$.

2) Время работы предподсчета должно быть равно $O(n)$.