

Тинькофф А'. Графы-1. Семинар.

Костя Амеличев, Дима Умнов, Ваня Сафонов, Вова Новиков

20.11.2021

Задача 1. Дан ориентированный граф, необходимо найти в нем путь максимальной длины, или сказать что есть путь бесконечной длины. Путь необязательно простой. Необходимое время работы $O(n + m)$ (стандартно n — количество вершин, а m — количество ребер в графе).

Задача 2. Дан граф из $2n$ вершин и $3n$ ребер. Известно, что степень каждой вершины равна 3. Удалите из графа ровно n ребер так, чтобы он стал двудольным. Решите за $O(n)$.

— — —

Задача 3. У вас есть полоска из n клеток, каждая из которых имеет один из k цветов. Также у вас есть k^2 «двойных» валиков — на левую части валика нанесен один цвет, а на правую — другой. У вас есть валик для каждой возможной пары цветов. Вы хотите раскрасить пустую полоску из n клеток так, чтобы она совпала с данной вам. Каждый валик можно использовать только один раз, при этом клетку нельзя перекрашивать (но красить поверх тем же цветом — можно). Необходимо решить задачу за $O(n^2)$. Валик (a, b) можно применить к клеткам $i, i + 1$: он красит клетку i в цвет a , клетку $i + 1$ в цвет b .

Задача 4. Вам дан неориентированный граф и его правильная раскраска в 3 цвета. Нужно проверить, можно ли изменить цвет каждой вершины так, чтобы раскраска осталась правильной раскраской в 3 цвета. Необходимо решить задачу за $O(n + m)$.

— — —

Задача 5. Дан граф на n вершинах, вес каждого ребра от 1 до k . Найдите кратчайший путь от вершины 1 до всех остальных за $O(nk)$.

а) $O(nk)$ с $O(nk)$ памяти и простой реализацией.

б) $O(nk)$ с $O(n)$ памяти.

— — —

Задача 6. Дан неориентированный граф на n вершинах и m ребрах. Поступают запросы: каждый запрос состоит из пары вершин s, t . Сколько ребер графа лежат на любом пути между s и t ?

Предподсчет за $O(n \log n + m)$, ответ на запрос за $O(1)$.

— — —

Задача 7. Дан неориентированный взвешенный граф на n вершинах и m ребрах. Все веса положительные. Найдите количество пятерок различных вершин a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , таких что существует кратчайший путь между вершинами 1 и a_5 , на котором лежат вершины a_1, a_2, a_3, a_4 в таком порядке.

Задача 8. Дан ориентированный взвешенный граф на n вершинах. Все веса положительные. Найдите в нем цикл с минимальным средним весом (средний вес цикла равен среднему арифметическому весов его ребер). Необходимое время работы: $O(n^3 \log C)$, где C — максимальный вес ребра.