

Тинькофф А'. RMQ, LCA. Семинар.

Костя Амеличев, Дима Умнов, Ваня Сафонов, Вова Новиков

5 ноября 2022

Задача 1. За $O(n)$ посчитайте для всех i от 1 до n максимальную степень двойки, не превосходящую i . Назовем ее $leadPower[i]$.

Задача 2. Выведите, как, имея $len = leadPower[r - l + 1]$, а также зная минимум на всех подотрезках массива длины len , найти $RMQ(l, r)$ за $O(1)$ на запрос. Обсудите Sparse Table.

Задача 3. Для каких функций работает наш алгоритм (Sparse Table), кроме минимума/максимума (битовые, теоретико-числовые)? Какое основное ограничение на функцию? Попробуйте изменить наш алгоритм так, чтобы этого ограничения не было (подсказка: можно подумать в сторону предподсчета на разделяй-и-властвуй). Какие останутся функции, которые в ДО считать будет эффективнее?

Задача 4. Вам дан двумерный массив $a_{i,j}$ и поступают запросы RMQ на *подквадратах*. Время работы $O(n^2 \log + q)$

— — —

Задача 5. Вам даны запросы нахождения количества различных на отрезке (давайте считать, что координаты заранее сжаты). Дополнительное условие для каждого запроса $l_i, r_i: l_i \leq l_{i+1}, r_i \leq r_{i+1}$. Предложите линейный алгоритм для решения такой задачи.

Задача 6. Назовем *рекордом* подотрезка $[l, r]$ такой элемент i , что $a_i = \max(a_i, \dots, a_r)$. Понятно, что на подотрезке может быть несколько рекордов (назовем их i_1, i_2, \dots, i_k). Назовем *стоимостью рекорда* i_j сумму $\sum_{k=i_{j-1}+1}^{i_j-1} a_k$ (иначе говоря, сумма всех элементов между соседними рекордами). Пусть стоимость i_1 равна 0. От вас требуется находить рекорд с максимальной стоимостью на подотрезке. Запросы удовлетворяют условию "окна" из прошлой задачи.

— — —

Задача 7. Для каждой вершины дерева вам даны числа h_v, x_v — высота максимального предка, до которого можно допрыгнуть, и стоимость посещения вершины. Найдите за $O(n \log n)$ для каждой вершины минимальную стоимость пути до корня (стоимость пути — сумма стоимостей вершин на пути).

Задача 8. Дано дерево, состоящее из n вершин. Есть массив v_1, v_2, \dots, v_k из вершин дерева. Есть q запросов. Каждый запрос состоит из отрезка массива $[l, r]$. Нужно найти $LCA(v_l, v_{l+1}, \dots, v_r)$.

Решите за время:

- Предподсчет за $O(n \log n + k \log k \log n)$. Ответ на запрос в online за $O(\log n)$.
- Предподсчет за $O(n \log n + k \log k)$. Ответ на запрос в online за $O(1)$.