

Тинькофф А'. Геометрия 1. Семинар.

Костя Амеличев, Дима Умнов, Ваня Сафонов, Вова Новиков

1 октября 2022

Набор определений

Мы будем говорить о геометрии на плоскости \mathbb{R}^2 . На ней введены координаты, то есть существует точка $(0, 0)$ и две перпендикулярные оси координат Ox, Oy . Каждая точка на плоскости задается парой координат $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Не будем различать понятия точки и вектора. Для нас такое различие бесполезно — давайте просто считать, что точке с координатами (x, y) соответствует вектор (x, y) .

Таким образом, набор базовых геометрических примитивов, с которыми мы работаем это вектор, прямая и окружность.

Вектор: Задается двумя координатами (x, y) , где $x, y \in \mathbb{R}$.

Прямая: Задается тремя вещественными числами (a, b, c) , где $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $(a, b) \neq (0, 0)$. Числа называются коэффициентами прямой.

Точка (вектор) $v = (x, y)$ лежит на прямой $\ell = (a, b, c)$ тогда и только тогда, когда

$$ax + by + c = 0$$

Простой вопрос: что может быть, если $a = b = 0$?

Окружность: Задается тремя вещественными числами (x_c, y_c, r) , где $x_c, y_c \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Для такой окружности (x_c, y_c) будут координатами центра, число r радиусом.

Из теоремы Пифагора легко получить, что точка (x, y) лежит на окружности тогда и только тогда, когда

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Задача 1. Это разминочная задача, в которой надо вспомнить, как делать различные штуки. Вы должны научиться мгновенно понимать, как делать любой из пунктов ниже.

1. Как работает сложение/вычитание векторов?
2. Что такое скалярное произведение векторов? Какие формулы для него существуют?
3. Как проверить, что два вектора перпендикулярны? Допустим у нас есть вектор (x, y) . Приведите пример вектора, перпендикулярного ему.
4. Что такое векторное произведение векторов? Какие формулы для него существуют? Как оно связано с площадью?
5. Как пересекать две прямые? Найдите формулу точки пересечения двух прямых в координатах.
6. У нас есть прямая $ax + by + c = 0$. Какие координаты у вектора перпендикулярного прямой? параллельного прямой?
7. У нас есть прямая $ax + by + c = 0$. Как найти любую точку, лежащую на этой прямой?
8. У нас есть две точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Найдите a, b, c для прямой, проходящей через них.
9. Мы сдвигаем прямую $ax + by + c = 0$ на вектор (x_m, y_m) . Каким будет новое уравнение прямой?
10. Чему равно расстояние от точки (x, y) до прямой $ax + by + c = 0$? Как действовать, если мы хотим найти точку, являющуюся проекцией? Как найти точку, симметричную (x, y) относительно прямой?
11. Задано две точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Как выглядит уравнение серединного перпендикуляра для отрезка, концами которого являются эти точки?
12. Даны координаты точек $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$. Как найти уравнение прямой, являющейся медианой, биссектрисой, высотой треугольника ABC из точки A ?

13. Даны точки A, B, C, D . Как проверить, что отрезки AB и CD пересекаются? Что если любое слово отрезок мы заменяем на луч? Запрещается использовать вещественные числа.
14. Как найти точки пересечения окружности и прямой? Какие случаи бывают?
15. Как найти точки пересечения двух окружностей? Какие случаи бывают?
16. Дана окружность и точка. Как найти уравнения касательных из точки к окружности? Как найти точки касания? Какие случаи бывают?

— — —

Время работы всех алгоритмов этого раздела должно быть $O(n)$, где n — размер многоугольника.

Задача 2. Вам дан многоугольник (необязательно выпуклый). Нужно найти его площадь.

Задача 3. Вам дан многоугольник (необязательно выпуклый). Также дана некоторая точка. Проверить, лежит ли точка внутри, на границе или вне многоугольника.

Какие есть более простые способы, если многоугольник выпуклый?

Задача 4. Вам дан многоугольник (необязательно выпуклый). Также дана некоторая точка. Найти кратчайшее расстояние от точки до какой-то точки многоугольника (внутренности или границы).

Задача 5. Вам дан многоугольник (необязательно выпуклый). Также дана некоторая точка вне многоугольника. Найти касательные из точки к многоугольнику. Приведите пример, когда касательной не существует.

— — —

Задача 6. Вам дано множество из n точек.

Найти три точки A, B, C из множества, такие что площадь ABC максимальна. Время работы $O(n^2)$.

Задача 7. Вам дано множество из n точек.

Поступает q запросов, каждый состоит из некоторого подмножества данных точек. Для каждого запроса нужно в ответ дать размер выпуклой оболочки этого подмножества точек.

На каждый запрос нужно отвечать за $O(n)$. Предобработка может быть любой полиномиальной.

— — —

Задача 8. Вам дано множество из n точек.

Для каждой точки из множества скажите площадь выпуклой оболочки всех точек множества кроме нее.

Необходимое время работы $O(n \log n)$.

Задача 9. Вам дан выпуклый многоугольник из n точек.

Поступает q запросов. В каждом запросе дается прямая. Чему будет равна ширина отрезка, если спроецировать многоугольник на эту прямую?

На запрос необходимо отвечать за $O(\log n)$ в онлайн, время предподсчета $O(n)$.

Задача 10. Вам дано множество из n точек.

Поступает q запросов. В каждом запросе дается точка. Чему будет равна площадь выпуклой оболочки множества, если к нему добавить эту точку?

На запрос необходимо отвечать за $O(\log n)$ в онлайн, время предподсчета $O(n \log n)$.