

# Список устных вопросов

Костя Амеличев, Дима Умнов, Ваня Сафонов

25 декабря 2021 г.

## Практические задачи

1. Дано дерево на  $n$  вершинах. На вершинах написаны остатки по модулю  $m$ . Дано  $q$  путей. Для каждого пути посчитайте произведение остатков у вершин на этом пути по модулю  $m$ . Необходимая асимптотика  $O((n + q) \log n)$ . Обратите внимание, что  $m$  не обязательно простое!
2. На поле есть  $n$  полей, в которые может приземлиться дрон. Каждая поляна имеет форму прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям. Известно, что каждая координата позиции дрона может измениться на не больше чем  $t$  после посадки. Дрон при этом должен остаться внутри одной из полей. Вы должны пометить некоторые участки полей как разрешенные для посадки (в остальных местах посадка дрона будет также запрещена). Площадь разрешенных мест для посадки должна быть  $\geq S$ . Дано расположение полей и число  $S$ , какое максимальное значение  $T$  может быть, чтобы можно было выделить места для посадки дрона? Ответом будет являться  $\lfloor T \rfloor$ . Решите задачу за время  $O(n \log n \log C)$  ( $C$  — максимальный модуль координат вершин прямоугольников полей).
3. Дан массив целых чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . В нем могут быть отрицательные числа. Разбить его на любое количество подотрезков так, чтобы сумма квадратов сумм чисел на подотрезках была минимальна. Решить задачу за  $O(n \log C + n \log n)$ , где  $C$  — ограничение на модули чисел массива.
4. Назовем ценностью отрезка количество различных чисел на нем. Найдите разбиение массива из  $n$  элементов на  $k$  отрезков с максимальной суммарной ценностью с асимптотикой  $O(nk \log^2 n)$ .
5. Выпишите формулы для:
  - Точки пересечения двух прямых
  - Уравнения прямой, проходящей через обе точки пересечения двух окружностей
  - Уравнения прямой, проходящей через обе точки касания к окружности из некоторой внешней точки

Все объекты задаются стандартным образом. Не нужно выписывать конечную формулу, можно вводить промежуточные переменные и использовать их в следующих формулах. В каждом пункте можно считать, что точки пересечения/касания существуют и различны.

6. Дано простое число  $p$  и два ненулевых остатка  $a, b$ . Найти любое решение уравнения

$$a^x \equiv b^y \pmod{p}$$

или сказать, что его не существует. Время работы  $O(\sqrt{p})$ .

7. Вам дан ориентированный ациклический граф. На его ребрах написаны пары целых положительных чисел  $(a, b)$ . Найдите такой путь из вершины 1 в вершину  $n$ , для которого  $\frac{\sum a_i}{\sum b_i}$  будет максимально. Ответом будет  $\lfloor \frac{\sum a_i}{\sum b_i} \rfloor$ . Необходимое время работы  $O((n + m) \log A)$ , где  $A$  — ограничение на все  $a_i$ .
8. Дано дерево на  $n$  вершинах, в каждой вершине записано число  $a_i$ . Вам даны пути от  $v$  до  $u$  — нужно отвечать, правда ли на этом пути числа отсортированы по возрастанию или убыванию. Предподсчет  $O(n \log n)$ , ответ на запрос  $O(1)$  online.
9. Расскажите, как:
  - (а) найти точку, покрытую максимальным числом прямоугольников (назовем число прямоугольников, покрывающих эту точку, за  $x$ )
  - (б) найти площадь фигуры (не обязательно связаной), образованной всеми точками, которые покрыты ровно  $x$  прямоугольниками

## Теоретические вопросы

1. Дана строка и ее суффиксный массив. Построить массив  $lcp$  за  $O(n)$ . Доказать корректность алгоритма.
2. Дано число  $n$ . Найти  $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$  за время  $O(n)$  ( $\sigma$  — сумма делителей числа).
3. Дан выпуклый многоугольник.  
Отвечать на запросы (за время  $O(\log n)$ ):
  - построение касательной из точки вне многоугольника
  - найти точки пересечения прямой и границы многоугольника
4. Дан массив целых чисел. Запросы: количество различных на отрезке, изменение значения в точке. Можно считать, что все числа в массиве целые от 1 до  $n$ .  
Покажите решение задачи с помощью 3d алгоритма Мо за время  $O((q+n)n^{\frac{2}{3}})$  (это не самое быстрое решение этой задачи, но вам нужно решить ее именно с помощью этого алгоритма).  
Доказательство асимптотики обязательно.
5. Вам дан бор  $T$ , состоящий из  $n$  вершин. Алфавит  $\Sigma$ . Постройте суффиксные ссылки для всех вершин бора за время  $O(n|\Sigma|)$ .
6. Дано дерево размера  $n$ . С предподсчетом за  $O(n \log n)$  отвечать на запрос  $LCA$  за  $O(1)$ .
7. Расскажите, как построить суффиксный массив за  $O(n \log n)$ .
8. Расскажите определение декартова дерева и объясните функции `split / merge`. Введите операции `insert, delete`.
9. Расскажите, как построить дерево центроидной декомпозиции за  $O(n \log n)$ .
10. Расскажите, как решать диофантово уравнение. Объясните асимптотику решения.

11. Расскажите, как поддерживать стек изменений gcd. Оцените асимптотику.
12. Расскажите, как для каждого числа от 1 до  $n$  предподсчитать, является ли оно простым за  $O(n)$ .
13. Расскажите, как найти выпуклую оболочку множества точек за  $O(n \log n)$ .
14. Расскажите, как находить минимальный средневзешенный цикл в графе.
15. Расскажите, как найти любое решение булевой формулы 2-SAT (то есть OR нескольких скобочек вида (что-то) AND (что-то), где (что-то) это либо переменная, либо ее отрицание).