

# Тинькофф А'. Графы-1. Семинар.

Костя Амеличев, Дима Умнов, Ваня Сафонов

20.11.2021

**Задача 1.** Дан ориентированный граф, необходимо найти в нем путь максимальной длины, или сказать что есть путь бесконечной длины. Путь необязательно простой. Необходимое время работы  $O(n + m)$  (стандартно  $n$  — количество вершин, а  $m$  — количество ребер в графе).

**Задача 2.** Загадан массив длины  $n$ . Вы знаете, что  $a_l \oplus a_{l+1} \oplus \dots \oplus a_r = c$ , где  $c = 0$  или  $1$ , для некоторых пар  $l, r$ . Найдите какой-нибудь массив, которых подходит под все условия, или скажите, что такого нет. Необходимое время работы  $O(n+m)$ , где  $m$  — число условий.

— — —

**Задача 3.** У вас есть полоска из  $n$  клеток, каждая из которых имеет один из  $k$  цветов. Также у вас есть  $k^2$  «двойных» валиков — на левую части валика нанесен один цвет, а на правую — другой. У вас есть валик для каждой возможной пары цветов. Вы хотите раскрасить пустую полоску из  $n$  клеток так, чтобы она совпала с данной вам. Каждый валик можно использовать только один раз, при этом клетку нельзя перекрашивать (но красить поверх тем же цветом — можно). Необходимо решить задачу за  $O(n^2)$ . Валик  $(a, b)$  можно применить к клеткам  $i, i + 1$ : он красит клетку  $i$  в цвет  $a$ , клетку  $i + 1$  в цвет  $b$ .

**Задача 4.** Вам дан неориентированный граф и его правильная раскраска в 3 цвета. Нужно проверить, можно ли изменить цвет каждой вершины так, чтобы раскраска осталась правильной раскраской в 3 цвета. Необходимо решить задачу за  $O(n + m)$ .

— — —

**Задача 5.** Дан граф на  $n$  вершинах, вес каждого ребра от 1 до  $k$ . Найдите кратчайший путь от вершины 1 до всех остальных за  $O(nk)$ .

а)  $O(nk)$  с  $O(nk)$  памяти и простой реализацией.

б)  $O(nk)$  с  $O(n)$  памяти.

— — —

**Задача 6.** Дан неориентированный граф на  $n$  вершинах и  $m$  ребрах. Поступают запросы: каждый запрос состоит из пары вершин  $s, t$ . Сколько ребер графа лежат на любом пути между  $s$  и  $t$ ?

Предподсчет за  $O(n \log n + m)$ , ответ на запрос за  $O(1)$ .

— — —

**Задача 7.** Дан неориентированный взвешенный граф на  $n$  вершинах и  $m$  ребрах. Все веса положительные. Найдите количество пятерок различных вершин  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ , таких что существует кратчайший путь между вершинами 1 и  $a_5$ , на котором лежат вершины  $a_1, a_2, a_3, a_4$  в таком порядке.

**Задача 8.** Дан ориентированный взвешенный граф на  $n$  вершинах. Все веса положительные. Найдите в нем цикл с минимальным средним весом (средний вес цикла равен среднему арифметическому весов его ребер). Необходимое время работы:  $O(n^3 \log C)$ , где  $C$  — максимальный вес ребра.