

# Тинькофф А'. Математика-2. Семинар.

Костя Амеличев, Дима Умнов, Ваня Сафонов

18 сентября 2021

**Задача 1.** Дано число  $n$ . Среди его делителей выбирается случайный делитель  $d$  равномерно. Найдите математическое ожидание  $\phi(d)$ . Время работы  $O(\sqrt{n})$ .

**Задача 2.** Вы стоите в вершине ориентированного графа и делаете последовательные переходы по ребру  $e$  с вероятностью  $p_e$  (сумма исходящих вероятностей из вершины равна 1, в случае, если ребра есть). Найдите матожидание количества ходов до момента, когда вам будет некуда идти (или определите, что вы будете ходить бесконечно), если:

1. граф ациклический,  $O(n + m)$
2. подумайте на досуге, что делать, если разрешены циклы,  $O(n^3)$ .

**Задача 3.** Костя генерирует скобочную последовательность по следующим правилам: скобка на позиции  $i$  с вероятностью  $p_i$  открывающая, с вероятностью  $(1 - p_i)$  закрывающая. Какова вероятность, что Костя получит правильную скобочную последовательность? Посчитайте за  $O(n^2)$ .

**Задача 4.** В перестановке  $(1, 2, 3, \dots, n)$   $k$  раз поменяли произвольную пару элементов местами, и сообщили вам получившуюся перестановку. Найдите четность числа  $k$  за:

1.  $O(n \log(n))$
2.  $O(n)$

**Задача 5.** Вам дан массив перестановок. Обсудите, как отвечать на запрос произведения (композиции) перестановок на подотрезке.

**Задача 6.** Найдите количество ПСП длины  $2n$ , состоящих из  $k$  типов скобок.

**Задача 7.** Научитесь решать предыдущую задачу с фиксированным  $n$  и запросом  $k$ .  $O(n^3)$  предподсчет,  $O(n)$  на запрос.

**Задача 8.** Найдите количество способов разбить число  $N$  на  $k$ :

- 1) положительных слагаемых
- 2) неотрицательных слагаемых

**Задача 9.** Найдите количество возрастающих последовательностей длины  $N$ , состоящих из чисел  $\leq K$ .

**Задача 10.** Найдите количество неубывающих последовательностей длины  $N$ , состоящих из чисел  $\leq K$ .

**Задача 11.** Найдите количество «пилообразных» перестановок длины  $N$ .

1.  $O(n^3)$
2.  $O(n^2)$

**Задача 12.** Обсудите, как генерировать в лексикографическом порядке

1. Перестановки
2. Правильные скобочные последовательности
3. Разложения числа  $N$  положительные на слагаемые
4. Разложения числа  $N$  на  $K$  положительных слагаемых
5. Разложения числа  $N$  на  $K$  положительных возрастающих слагаемых
6. Выборы  $K$  объектов из  $N$  с учетом порядка

7. Выборы  $K$  объектов из  $N$  с без учета порядка

8. Выборы  $K$  объектов из  $N$  с повторениями

**Задача 13.** Обсудите, как получать  $k$ -й лексикографически объект, и как получать номер объекта в лексикографическом порядке. В качестве объектов — варианты из предыдущего пункта.

**Задача 14.** Докажите, что  $C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \dots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^{k+1}$  с помощью треугольника Паскаля.