# Tinkoff Generation 2020-2021. A'. Теоретический зачет.

Константин Амеличев, Иван Сафонов, Екатерина Фадеева

22.05.2021

## Тест

**№ 1** Два игрока играют в игру. Даны две лестницы по 5 ступенек в каждой, на $i$-той ступеньке первой лестницы лежит $a_i$ монет, а на $i$-той ступеньке второй лестницы лежит $b_i$ монет. За ход можно переложить любое ненулевое число монет с $i$-той ступеньки на $i-1$-ую ступеньку в одной любой лестнице. Проигрывает тот игрок, который не может сделать ход. Найдите значение функции Шпрага-Гранди для следующих значений:

- $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 3, a_5 = 4$
- $b_1 = 5, b_2 = 5, b_3 = 1, b_4 = 5, b_5 = 4$

**№ 2** Найдите количество всех вершин и терминальных вершин в суффиксном автомате строки abcdefghib (считайте вершину-исток терминальной)

**№ 3** Школьник сдает зачет. На зачете ему выдаются три рандомных билета по каждой из трех тем: Математика, Потоки и Графы. По каждой из тем можно один раз перетянуть билет, при этом новый билет выбирается рандомно из всех билетов этой темы без одного. В Математике школьник знает 4 билета из 8, в Потоках школьник знает 5 билетов из 6, в Графах школьник знает 1 билет из 4. Найдите математическое ожидание количества сданых билетов

**№ 4** В 2-3 дерево добавляли ключи в следующем порядке: 3, 4, 1, 6, 5, 2. Выпишите два числа — глубину дерева и глубину lca листов с ключами 2, 4. Корень имеет глубину ноль.

**№ 5** Найдите максимальное количество строк, которые можно получить сложением с любыми коэффициентами строк из матрицы A. Все операции по модулю 3, т.е. например $1 + 2 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**№ 6** Найдите количество свидетелей простоты у числа 223.

**№ 7** Найдите максимальное количество шагов, которое сделает алгоритм Борувки на графе размером 100

**№ 8** Найдите первые 5 значений такой функции $f$, что $f * 1 = \phi$

## Теоретические задачи

**№ 1** Есть $n$ групп предметов. В каждой группе $l_i \geq 2$ предметов. Каждый предмет имеет целочисленный вес от 1 до $C$.

Проверьте, можно ли из каждой группы выбрать **ровно два разных** предмета (возможно одинакового веса), таких что сумма их весов будет ровно $C$.

a) $O((\sum\limits_{i=1}^{n} l_i)C)$ [0.8 балла]

b) $O((\sum\limits_{i=1}^{n} l_i^2) + nC \log C)$ [0.6 балл]

c) $O(\sum\limits_{i=1}^{n} l_i + nC \log C)$ [0.6 балла]

Обратите внимание, что пункты a и c независимые и не вложены друг в друга.

**№ 2** Есть множество $S$, состоящее из выпуклых многоугольников. Будет два вида запросов:

1. Добавить новый выпуклый многоугольник в множество $S$
2. Удалить из множества $S$ некоторый многоугольник

После каждого из запросов нужно говорить площадь суммы Минковского всех многоугольников, лежащих в $S$.

Научиться отвечать на запросы **online** за время:

a) $O(s)$ на запрос, где $s$ это суммарное количество вершин во всех многоугольниках из $S$ на момент запроса [0.5 балла]

b) $O(k \log s)$, где $k$ это количество вершин в добавляемом/удаляемом многоугольнике. Доп. условие: все многоугольники симметричны относительно точки $(0, 0)$. [1 балл]

c) $O(k \log s)$, где $k$ это количество вершин в добавляемом/удаляемом многоугольнике [0.5 балла]

За **offline** решения будет ставиться 50% баллов.

**№ 3** Пусть $M = (I, S)$ — это пара, состоящая из некоторого множества и множества его подмножеств ($S \subseteq 2^I$).

Известно, что $M$ это **не матроид** (то есть для $M$ не выполнена как минимум одна аксиома матроида). Известно, что $\varnothing \in S$.

Докажите, что существует набор весов $w : I \to R_{\geq 0}$, такой что жадный алгоритм поиска базы максимального веса найдет **неправильный** ответ. Под базой понимается любое подмножество $I$, которое принадлежит $S$ и которое нельзя расширить так, чтобы новое множество тоже принадлежало $S$. Обратите внимание, что жадный алгоритм должен не работать при любом порядке сортировки равных весов (если такие будут).

Решение, которое разбирает один из случаев того, какая из аксиом не выполнена, получит половину баллов.