

Список тем к теоретическому зачету

Амеличев Константин, Сафонов Иван, Фадеева Екатерина

26 декабря 2020 г.

Вопросы на 2

1. Поиск количества треугольников в графе за время $O(E\sqrt{E})$.
2. Дан выпуклый многоугольник. За время $O(\log n)$ отвечать на запрос: лежит ли точка внутри него?
3. Дан массив целых чисел. Отвечать на запрос: количество различных чисел на отрезке за время $O(\log^2 n)$ с помощью merge-sort tree.
4. Дано простое число p . Найти $1^{-1}, 2^{-1}, \dots, (p-1)^{-1}$ по модулю p за время $O(p)$.
5. Дано дерево на n вершинах, каждое ребро которого имеет какой-то вес. Ответьте на q запросов о нахождении минимума среди весов на пути в дереве за $O(n + q \log n)$
6. Дана строка. Для каждой позиции найти максимальную длину палиндрома с центром в этой позиции за время $O(n)$.
7. Дано число n . Для каждого числа от 1 до n определить является ли оно простым. Время работы должно быть $O(n)$.
8. 1. Дан массив размера n и алгоритм, умеющий решать LCA за $O(f(n))$ на запрос (n — размер дерева). Решить задачу RMQ за $O(n)$ на предподсчет и $O(f(n))$ на запрос.
2. Дано дерево размера n и алгоритм, умеющий решать RMQ за $O(f(n))$ на запрос (n — размер массива). Решить задачу LCA за $O(n)$ на предподсчет и $O(f(n))$ на запрос.
9. Даны два корневых дерева размера n . Определить за $O(n)$, изоморфны ли деревья (вероятность ошибки должна быть мала).
10. Дано дерево, состоящее из n вершин и целое число $1 \leq k \leq n$. Найти количество путей длины ровно k за время $O(n)$.
11. После $O(n)$ предподсчета, научитесь отвечать на запрос поиска младшего бита / старшего бита / количества бит за $O(1)$
12. Дана строка s . От вас требуется выполнить q операций:
 - Выделить подотрезок $[l_i, r_i]$
 - Проверить, совпадает ли он с текущим префиксом строки соответствующей длины.

- Вырезать его из строки и приклеить перевернутым в начало. (например, «abacaba», $l = 3$, $r = 4$, «saababa»)

Принимается любая асимптотика быстрее $O(|s| \cdot q)$ (то есть $o(|s| \cdot q)$, которую вы можете обосновать).

13. Пусть есть массив целых чисел размера n . Мы отвечаем на два самых простых запроса: изменение значения в точке и подсчет суммы чисел на префиксе массива.

Расскажите решение этой задачи с помощью дерева Фенвика (напишите формулы и докажите время работы).

14. Поиск максимальной клики графа за время $O(n2^{\frac{n}{2}})$.

Вопросы на 4

1. Дан массив целых чисел. Запросы: количество различных на отрезке, изменение значения в точке.

Покажите решение задачи с помощью 3d алгоритма Мо за время $O(q + n^{\frac{5}{3}})$ (это не самое быстрое решение этой задачи, но вам нужно решить ее именно с помощью этого алгоритма).

2. Дан выпуклый многоугольник.

Отвечать на запросы (за время $O(\log n)$):

- построение касательной из точки вне многоугольника
- найти точки пересечения прямой и границы многоугольника

3. Линейное сведение задачи поиска минимума в массиве целых чисел к поиску минимума в массиве целых чисел, в котором соседние числа отличаются на ± 1 .

4. Дан массив целых чисел размера n и число $1 \leq k \leq n$. Рассмотрим разбиение массива на отрезки. Ценой разбиения назовем сумму квадратов сумм чисел в каждом отрезке. Найти минимальную цену разбиения на ровно k отрезков. Время работы $O(n \log A)$.

5. Построить суффиксный массив для строки за $O(n \log n)$.

6. Дана строка и ее суффиксный массив. Построить массив lcp за $O(n)$. Доказать корректность алгоритма.

7. Дано простое число p . Найти $\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(p-1)$ за время $O(p)$ (ϕ — функция Эйлера).

8. Дано n полуплоскостей. Построить их пересечение за $O(n^2)$ (можно $O(n \log n)$)

9. Дан массив целых чисел a_n , разница между соседними элементами всегда равна ± 1 . Ответьте в онлайн на q запросов минимума на отрезке за время $O(n + q)$.

10. Дан массив целых чисел $a_0, a_1, \dots, a_{2^n-1}$.

- Для каждой маски $mask$ найти сумму a_i по всем i — подмаскам $mask$.
- Для каждой маски $mask$ найти сумму a_i по всем i — надмаскам $mask$.
- Как по этим значениям восстановить значения a ?

11. Дано дерево на n вершинах. От вас требуется q раз найти произведение чисел на пути по простому модулю m за асимптотику $O((n + q) \log n)$
12. Решите задачу о поиске k -го предка в дереве за время $O(1)$ на запрос с предподсчетом $O(n \log n)$.
13. Посчитайте число замощений поля $n \times m$ (возможно, с препятствиями) доминошками за $O(2^n \cdot nm)$ и $O(4^n \cdot m)$. Бонус — $O(8^n \cdot \log m)$
14. Пусть вам дан алгоритм под кодовым названием «тьфу-тьфу-тьфу», который может перемножить два многочлена за время $O(n \log n)$. Найдите с его помощью в дереве для каждого d количество путей длины d за $O(n \log^2 n)$.