Тинькофф А'. Корневая оптимизация. Семинар.

kik0s, isaf27

7 сентября 2019

Задача 1. За $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ найти у натурального числа n:
а) все его натуральные делители;
б) его разложение на простые множители.

Задача 2. Найти количество треугольников (циклов длины 3) в неориентированном графе без петель из n вершин и m ребёр за $\mathcal{O}(m\sqrt{m})$, при условии, что:
а) в нём нет кратных рёбер;
б) в нём могут быть кратные рёбра.

— — —

Задача 3. Дано дерево из n вершин, изначально в каждой вершине записано число 0. Есть запросы двух видов.

1. Прибавить ко всем вершинам, смежным с вершиной v, число x.
2. Узнать значение в вершине v.

Ответить на q запросов за время $\mathcal{O}(n + q\sqrt{n})$.

Задача 4. Дан текст t, далее в online поступают запросы вида: дана строка s, найти количество её вхождений в текст. Известно, что сумма длин строк по всем запросам не превосходит S. Ответить на запросы за время $\mathcal{O}(|t|\sqrt{S})$.

Задача 5. Дано дерево из n вершин, изначально все вершины покрашены в белый цвет. Есть запросы двух видов.

1. Покрасить вершину v в чёрный цвет.
2. Для вершины v найти расстояние до ближайшей чёрной вершины.

Ответить на q запросов за время $\mathcal{O}(n + q\sqrt{n})$.

— — —

Задача 6. Есть запросы двух видов.

1. Вставить на i-е место в массиве число x.
2. Узнать количество чисел на отрезке $[l; r]$, значения которых лежат в отрезке $[a; b]$.

Ответить на n запросов за время:
а) $\mathcal{O}(n\sqrt{n}\log n)$;
б) $\mathcal{O}(n\sqrt{n \log n})$.

Задача 7. В предыдущей задаче добавить еще два вида запросов: переворот отрезка $[l; r]$ и удаление элемента на позиции x.
а) $\mathcal{O}(n\sqrt{n}\log n)$;
б) $\mathcal{O}(n\sqrt{n \log n})$.

— — —

Задача 8. Дан массив a из n чисел, а также q запросов $[l_i; r_i]$. Для каждого запроса найти `MEX` чисел из этого отрезка, то есть минимальное целое неотрицательное число, не представленное среди $a_{l_i}, a_{l_i+1}, \ldots, a_{r_i}$. Ответить на запросы за время:
а) $\mathcal{O}((n + q)\sqrt{n}\log n)$;
б) $\mathcal{O}((n + q)\sqrt{n})$.

Задача 9. Дано дерево из n вершин, каждой вершине i сопоставлено число a_i. Также даны q запросов $(u_i; v_i)$. Для каждого запроса найти количество инверсий на пути из u_i в v_i: если этот путь представляет из себя последовательность вершин $w_1, \ldots, w_k$, то необходимо найти количество пар (i, j), таких что $a_{w_i} > a_{w_j}, i < j$.

Задача 10. Дан массив a из n чисел, а также q запросов двух видов.

1. Узнать `MEX` на отрезке $[l; r]$.
2. Установить значение i-го элемента массива равным x.

Ответить на запросы за время $\mathcal{O}((n+q) \cdot n^{\frac{2}{3}})$.

— — —

Задача 11. Дан массив a из n чисел. Рекорд — позиция i такая, что для всех $j < i$: $a_j < a_i$. Поступают q запросов: установить значение i-го элемента равным x. После каждого запроса необходимо узнать количество рекордов. Ответить на запросы за время $\mathcal{O}(n + q\sqrt{n \log n})$.

Задача 12. Дан массив a из n чисел. Нужно отвечать на q запросов следующего вида: задан отрезок $[l, r]$, для каждого числа x, встречающегося среди чисел $a_l, a_{l+1}, \ldots, a_r$, выпишем его количество вхождений в это множество чисел. Ответом на запрос является минимальное натуральное число, не встречающееся среди выписанных чисел. Разрешается использовать $O((n+q)\sqrt{n})$ времени и памяти.

а) можно отвечать на запросы $offline$;

б) нужно отвечать на запросы $online$.

— — —

Задача 13. Рассмотрим стандартную задачу о рюкзаке: есть n предметов с весами $w_1, w_2, \ldots, w_n$, таких что $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = S$. Определить какие веса от 0 до S можно набрать некоторым подмножеством рюкзака.

-1) вспомните, как решать задачу за время $O(nS)$ и $O(\frac{nS}{w})$;

а) придумайте, как решать задачу за любое время быстрее, чем в предыдущем пункте;

б) решите задачу за время $O(S\sqrt{S})$;

в) решите задачу за время $O(\frac{S\sqrt{S}}{w})$;

г) как решить задачу с восстановлением ответа для некоторого одного веса за время, как в предыдущем пункте.