

Математика 1. Семинар

kik0s, isaf27

05.10.2019

Задача 1.

- a) Даны 2 натуральных числа a и b . Вспомните алгоритм Евклида нахождения НОД чисел a и b . Если известно, что $a, b \leq n$, то на каком тесте алгоритм совершит больше всего итераций?
- b) Даны 2 натуральных числа a и b . Пусть $d = \gcd(a, b)$. Найдите такие целые коэффициенты k_a, k_b , такие что $|k_a|, |k_b| \leq \max(a, b)$ и $k_a a + k_b b = d$
- c) Как найти описание всех решений Диофантова уравнения $ax + by = c$, где a, b, c некоторые целые коэффициенты?
Во всех пунктах время работы должно быть $O(\log(\max(a, b)))$.

Задача 2. Есть натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n . Обозначим $A = \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Найдите любые такие целые коэффициенты k_1, k_2, \dots, k_n , такие что $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $k_i \leq A$. Время работы должно быть $O(n + \log^3 A)$.

Задача 3. Дан массив натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Отвечать на q запросов, каждый задается числом x .

- a) Найти количество отрезков $[l, r]$, таких что $\gcd(a_l, a_{l+1}, \dots, a_r) = x$.
- b) Найти количество отрезков $[l, r]$, таких что $((a_l \bmod a_{l+1}) \bmod a_{l+2}) \dots \bmod a_r = x$.
Время работы должно быть $O(n \log^2 A + q)$.

Задача 4. Китайская теорема об остатках

Пусть известно, что $x \equiv d_1 \pmod{m_1}$ и $x \equiv d_2 \pmod{m_2}$. Как найти, чему равно x по модулю $\text{lcm}(m_1, m_2)$? Вспомните, что есть не более одного такого остатка.

Задача 5. Есть 2 натуральных числа a и m , причем $\gcd(a, m) = 1$. Вспомните, почему существует единственное $0 \leq b < m$, такое что $ab \equiv 1 \pmod{m}$.

- a) Как найти b , если m — простое число.
- b) m — произвольное натуральное число.
Время работы $O(\log m)$.

Offtop: Как перемножать числа по модулю m за $O(1)$, если $m \leq 10^{18}$?

Задача 6.

- a) Пусть есть некоторое простое p и натуральное $n < p$. Найдите обратные ко всем числам $1, 2, \dots, n$ за время $O(n + \log p)$.
- b) Как после некоторого подсчета за время $O(n)$ считать биномиальные коэффициенты C_a^b (при $b \leq a \leq n$) за время $O(1)$?

Задача 7. Есть натуральное число n .

- a) Найти все простые числа от 1 до n . Какая асимптотика количества таких чисел (от n)?
- b) После некоторого подсчета осуществлять факторизацию числа $x \leq n$ за время $O(\log x)$.
- c) Найти $\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n)$, где $\phi(x)$ это функция Эйлера.
Найти $S(1), S(2), \dots, S(n)$, где $S(x)$ это сумма делителей числа x .
Найти $d(1), d(2), \dots, d(n)$, где $d(x)$ это количество делителей числа x .

1) Время работы должно быть равно $O(n \log \log n)$.

2) Время работы должно быть равно $O(n)$.

Задача 8. Пусть есть простое число p и 4 ненулевых остатка a, b, c, d . Найти количество различных остатков при делении на p среди $a^{k_a} b^{k_b} c^{k_c} d^{k_d}$ при всех натуральных k_a, k_b, k_c, k_d . Время работы должно быть $O(\sqrt{p})$

Задача 9. Дано натуральное число n и натуральное нечетное число k . Проверить что у n ровно k натуральных делителей за время $O(n^{\frac{1}{4}})$.