

Оптимизации динамического программирования. Семинар

kik0s, isaf27

28.09.2019

Задача 1. Даны пары точек на координатной прямой. Надо поставить k станций на координатную прямую таким образом: поставив их в целые точки, мы каждой паре задаем свою станцию и прибавляем к ответу расстояние между точками пары и станцией. Найдите минимальное разбиение:

- a) $O(n^2k)$
- b) $O(nk \log^3 n)$
- c) $O(nk \log^2 n)$

Задача 2. Вася надувает воздушный шар. Каждую секунду он может либо дополнительно надуть шар, либо ничего не делать. Если он надувает шар в i -ю секунду, то радиус увеличивается на a_i , но после этого радиус будет уменьшаться на b_i в секунду до следующего поддува. Найдите максимальный радиус шара, который можно получить за n секунд.

- a) $b_i < b_{i+1}$, $O(n)$.
- b) запросы произвольные, $O(n \log MAXC)$.

Задача 3. Для заданного набора символов известно количество их вхождений в текст (a_i). Надо сопоставить каждому символу двоичный префиксный код так, чтобы двоичные коды были упорядочены по возрастанию аналогично символам (если $i < j$, то $ans_i < ans_j$), а суммарный размер текста в битах был минимален.

- a) $O(n^3)$
- b) $O(n^2)$

Задача 4. Дан массив, который надо разбить на k отрезков таким способом, чтобы для любых двух соседних выполнялось $|sum_i - sum_{i+1}| \leq \max\{max_i, max_{i+1}\}$

- a) Придумайте идейное сведение (подсказка - мы хотим разбить массивы на отрезки, минимизируя какую-то другую функцию).
- b) Придумайте решение задачи, если мы хотим разбить не на k отрезков, а на сколько угодно, в предположении, что за каждый новый отрезок мы платим стоимость $cost = const$.
- c) Решите задачу за $O(n \log MAXC \log n)$

Задача 5. Есть m -элементное множество X и n человек. Дан массив a_1, \dots, a_n , где $1 \leq a_i \leq 2^m - 1$ — двоичная маска элементов X , которые есть у i -го человека. Надо разбить массив на хотя бы k подотрезков, каждый длиной не меньше L , так чтобы максимизировать *красоту разбиения*. *Красота разбиения* — минимум из *красот отрезков* в этом разбиении. *Красота отрезка* $[l, r]$ — количество элементов X , которые есть у всех людей в отрезке $[l, r]$.

- a) $O(nm \log n)$
- b) $O(nm + n \log n)$