Взвешенные графы

Задачи

Кратчайшие пути

Задача 1. Дан взвешенный граф на n вершинах. Веса всех ребер — **вещественные** числа от 1 до 2. Требуется найти кратчайшие расстояния от вершины 1 до всех остальных вершин за $O(n+m)$.

Задача 2. Дан взвешенный граф на n вершинах. Для данного k требуется за $\mathcal{O}(n^3)$ найти такие k вершин, что число кратчайших путей от 1 до n, проходящих через все эти вершины, максимально.

Задача 3. Дан граф на n вершинах. Однако его ребра заданы весьма необычным образом. Есть m групп ребер. Каждая группа ребер определяется четырьмя числами: t, v, l, r и w, что соответствует тому, что все вершины с номерами от l до r соединены ребром веса w с v. При этом если $t=1$, то все эти ребра из группы направлены из v, а если $t=2$, то все ребра направлены в v. Необходимо найти длины кратчайших путей от вершины s до всех остальных вершин.

a) $\mathcal{O}((n+m)\log^2 n)$ b) $\mathcal{O}((n+m)\log n)$

Задача 4. В каждой клетке прямой записано число 0 или 1. Поступает информация: четность числа единиц на отрезке $[L_i, R_i]$, найти первый запрос, после которого данные противоречивы. Онлайн. Асимптотика $\mathcal{O}(n+q\log n)$.

Задача 5. Даны n точек на плоскости. Надо разбить их на два множества, чтобы минимизировать максимальное расстояние между точками из одного множества.

a) $\mathcal{O}(n^2\log n)$
b) $\mathcal{O}(n^2)$
c) $\mathcal{O}(n)$

Задача 6. Даны n клеток, покрашенных в цвет 0, а также q запросов покраски отрезка $[l;r]$ в цвет c. Для каждой клетки найти итоговый цвет. Время $\mathcal{O}(n+q\cdot\alpha(q,n))$.

Задача 7. Дан массив размера n. Надо в онлайне отвечать на 2 типа запросов: добавить число в конец, минимум на суффиксе. Асимптотика $\mathcal{O}((n+q)\cdot\alpha(q,n))$.

Задача 8. Докажите, что максимальный вес ребра на пути между парой вершин в минимальном остове не зависит от выбора конкретного минимального остова.

Задача 9. Можно узнать сумму на подотрезке массива с i по j за c_{ij}. Выбрать такое множество отрезков, что они однозначно позволяют восстановить массив и имеют минимальную суммарную стоимость. $\mathcal{O}(n^2)$.

Задача 10. Дан взвешенный неориентированный граф. Поступают q запросов вида (i,w). Ответом на запрос является минимальное расстояние от вершины 1 до вершины n если в исходном графе i-е ребро имело бы вес w. $\mathcal{O}((n+m+q)\log n)$.

Задача 11. Дан взвешенный граф и какой-то остов в нём. Вершина A называется столицей, если для любой другой вершины B самое короткое ребро на пути от A до B не длиннее самого короткого ребра на пути от A до B по остову. Требуется за $O(m\log n)$ найти все столицы.

Задача 12. Дан ациклический ориентированный граф на n вершинах и m рёбрах. На каждом ребре написана какая-то буква. Найти лексикографически минимальный простой путь из вершины 1 в вершину n за время $\mathcal{O}(m\log n)$.

Задача 13. Дан ориентированный взвешенный граф на n вершинах и m рёбрах, веса рёбер — натуральные числа, не превосходящие C. Найти округленный вверх средний вес минимального средневзвешенного цикла за время $\mathcal{O}(nm\log C)$. Средний вес цикла — сумма весов рёбер, делённая на количество рёбер.

Задача 14. Дан взвешенный полный граф на n вершинах. Каждой вершине соответствует число $a_v \le C$. Вес ребра (v,u) равен $a_v \oplus a_u$ (XOR). Найти минимальный остов. Время $\mathcal{O}(n\log n\log C)$.

Bonus: вершины добавляются по одной, в онлайне пересчитывать ответ. Время $\mathcal{O}(n\log^2 C)$

Задача 15. Дан невзвешенный неориентированный граф. Назовём остовное дерево хорошим для вершины v, если кратчайшее расстояние от вершины v до любой другой вершины u совпадает с расстоянием от v до u в остовном дереве. Для каждой пары вершин v и u найдите количество остовных деревьев, хороших и для v, и для u.

Задача 16. (*) Найти путь из s в t, в котором сумма k максимальных ребер минимальна за $\mathcal{O}((n+m)poly(\log n))$.

a) $k=1$
b) $k=2$
c) $k=3$

Задача 17. (*) Дано m рёбер, пронумерованных от 1 до m. Ответить на q запросов: «является ли граф, образованный рёбрами подотрезка $[l;r]$, двудольным?». Время:

а) $\mathcal{O}((m+q)\sqrt{m}\log m)$;
б) $\mathcal{O}(m\log^3 m + q\log n)$;
в) $\mathcal{O}(m\log^2 m + q\log n)$
г) $\mathcal{O}(m\log m + q\log n)$

Задача 18. (*) Рёберным графом называется граф, в котором вершины соответствуют рёбрам в изначальном графе (и имеют тот же вес). Причём для каждой пары рёбер, смежных одной и той же вершине A начального графа, есть ребро между соответствующим им вершинам с весом равным весу A в начальном графе. Требуется за $\mathcal{O}(m \cdot \alpha(m,n))$ найти вес минимального остовного дерева в:
a) Рёберном графе
b) Рёберном графе рёберного графа

Задача 19. (*) Дан граф на n вершинах и m рёбрах. Для каждой вершины требуется найти вес минимального остова, содержащего все рёбра, смежные с данной вершиной. Время $\mathcal{O}(m\log n)$.

Задача 20. (*) Дано n случайных точек на плоскости. Построим на этих точках полный граф, где вес ребра — евклидово расстояние между точками. Давайте выберем какое-то число k и найдем для каждой точки k ближайших. После чего на полученном графе найдем MST за $\mathcal{O}(nk\log n)$. Какое k надо выбрать, чтобы данный алгоритм находил MST изначального графа?

Задача 21. (*) Дано n случайных точек на плоскости. Построим на этих точках полный граф, где вес ребра — евклидово расстояние между точками. Найдите MST данного графа за $\mathcal{O}(n\log n)$.

Задача 22. (*) Постройте тест, на котором n запросов к СНМ-у размера n с эвристикой сжатия путей, но без ранговой эвристики, работают за $\Omega(n\log n)$.