Во всех задачах n — число вершин, а m — число рёбер.

Задача 1. Предложите способ за $O(n+m)$ найти:
a) Цикл нечётной длины в неориентированном графе.
b) Цикл нечётной длины в ориентированном графе.

Задача 2. Дан ориентированный граф. За один ход можно удалить все входящие или все исходящие ребра одной вершины (но не одновременно). Удалить все рёбра графа за min число ходов.

Задача 3. Есть n дверей и m переключателей. Изначально все двери закрыты. Каждый переключатель контролирует двери в некоторые комнаты, при этом каждая дверь контролируется ровно двумя переключателями. Каждый переключатель инвертирует состояние (открыта/закрыта) дверей, которые он контролирует. Определить, можно ли открыть все двери одновременно. Асимптотика $O(n+m)$.

Задача 4. Дан невзвешенный неориентированный граф. Требуется найти кратчайший путь между двумя вершинами в его дополнении. Время работы должно составлять $O(n+m)$.

Задача 5. (Лемма Холла) Пусть в двудольном графе для любого подмножества вершин A_i из первой доли множество всех вершин из второй доли, смежных по ребру с хотя бы одной вершиной из A_i обозначается как B_i. Докажите, что в графе есть совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $|A_i| \le |B_i|$ для всех A_i.

Задача 6. Докажите, что если в двудольном графе у каждой вершины одинаковая степень, то есть совершенное паросочетание.

Задача 7. Дан ориентированный ацикличный граф. Предложите алгоритм поиска минимального по мощности множества путей, покрывающих все вершины графа.
a) Пути не могут пересекаться по вершинам, время работы $O(nm)$.
b) Пути могут пересекаться по вершинам, время работы $O(n^3)$.

Задача 8. Дан двудольный граф, у каждой вершины есть вес. Требуется за $O(nm)$ построить такое паросочетание, что сумма весов всех вершин, входящих в паросочетание была максимальна, если:
a) Веса всех вершин второй доли равны нулю.
b) Веса всех вершин неотрицательны.

Задача 9. Дан неориентированный граф на n вершинах. Каждой вершине v сопоставлено целое неотрицательное число $a_v < 2^{22}$. Вершины v и u соединены ребром тогда и только тогда, когда $a_v \& a_u = 0$. Найдите количество компонент связности в получившемся графе.

Задача 10. В изначально пустой двудольный граф по очереди добавляются рёбра, всего происходит m добавлений. После каждого добавления необходимо говорить размер максимального паросочетания. Суммарное время работы должно составлять $O(nm)$.

Задача 11. Пусть в двудольном графе степени всех вершин одинаковые и равны 2^k для некоторого целого неотрицательного k. Предложите алгоритм поиска совершенного паросочетания в этом графе за $O(n+m)$.

Задача 12. Научитесь правильно красить рёбра d-регулярного двудольного графа в d цветов за a) $O(n \cdot m \cdot d)$ b) $O(n \cdot m \cdot \log d)$.

Задача 13. Дано N различных прямых. Нужно выбрать максимальное по размеру подмножество прямых такое, что никакие две прямые не параллельны, и никакие прямые не пересекаются в точке с $x = 0$ за полиномиальное от N время.

Задача 14. Найти за $O(VE)$ лексикографически минимальное из минимальных по размеру вершинных покрытий.

Задача 15. Предложите алгоритм, который за $O(n+m)$ строит компоненты вершинной двусвязности. Компонентой вершинной двусвязности графа называется максимальный по включению набор ребер, такой что любые два ребра из него лежат на вершинно-простом цикле.

Задача 16. (*) Постройте матрицу $n \times n$, состоящую из стенок и пустых клеток, на которой при выполнении bfs-а из правого нижнего угла размер очереди будет $\omega(n^2)$. Ходить можно между вершинами, смежными по стороне.

Задача 17. (*) Требуется за $O(n+m)$ найти какую-нибудь вершину, лежащую в пересечении всех циклов ориентированного графа.

Задача 18. (*) Есть n людей, изначально человек номер 1 знает секрет. Происходит m встреч: между парой людей a_i и b_i в момент времени t_i, все t_i различны. Если к этому моменту времени кто-то из пары знал секрет, то после встречи оба знают секрет. Вы можете отменить одну любую встречу. Какое наименьшее число людей могут знать секрет после всех встреч? Асимптотика $O(n+m)$.

Задача 19. (*) Дан произвольный **не**ориентированный граф. Покройти все его вершины простыми непересекающимися циклами.

Задача 20. (*) Вам дана матрица размера $n \times m$, в которой есть ячейки, в которых стоят стрелочки. Стрелочки можно перенаправить в четыре стороны: вверх, вниз, влево, вправо. Однако направлять стрелочки можно только в сторону других стрелочек (то есть нельзя направлять на пустые ячейки и границы матрицы). Двигаться по стрелочкам можно только в соседние клетки. Вам нужно придумать такой способ расстановки стрелочек, чтобы:

a) Количество циклов было максимально.

b) Количество циклов было минимально.

Задача 21. (*) Дан граф на $n \le 10^5$ вершинах и $m \le 10^5$ ребрах. Необходимо выбрать в нем две различные вершины s и t и построить между ними 3 реберно и вершинно простых пути, каждые два из которых были бы реберно и вершинно не пересекающимися (за исключением вершин s и t), либо сказать, что это невозможно.

Задача 22. (**) Найти совершенное паросочетание в d-регулярном графе за $O(n \log n)$, если считать, что d — константа.

Задача 23. (***) Дан граф, на каждой вершине записано число (все числа различны). Между двумя вершинами проводится неориентированное ребро если значение на одной из вершин делит значение на другой вершине. Надо удалить минимальное количество вершин, чтобы граф стал двудольным. ($n \le 10^5, a_i \le 10^5$).