

Во всех задачах n — число вершин, а m — число рёбер.

Задача 1. Предложите способ за $O(n + m)$ найти:

- Цикл нечётной длины в неориентированном графе.
- Цикл нечётной длины в ориентированном графе.

Задача 2. Дан ориентированный граф. За один ход можно удалить все входящие или все исходящие рёбра одной вершины (но не одновременно). Удалить все рёбра графа за \min число ходов.

Задача 3. Есть n дверей и m переключателей. Изначально все двери закрыты. Каждый переключатель контролирует двери в некоторые комнаты, при этом каждая дверь контролируется ровно двумя переключателями. Каждый переключатель инвертирует состояние (открыта/закрыта) дверей, которые он контролирует. Определить, можно ли открыть все двери одновременно. Асимптотика $O(n + m)$.

Задача 4. Дан двудольный граф, у каждой вершины есть вес. Требуется за $O(nm)$ построить такое паросочетание, что сумма весов всех вершин, входящих в паросочетание была максимальна, если:

- Весы всех вершин второй доли равны нулю.
- Весы всех вершин неотрицательны.

Задача 5. Из строки длиной n выписали все подстроки длины k , а потом стёрли изначально строку. Требуется за $O(nk)$ по выписанным подстрокам восстановить исходную строку.

Задача 6. Дан неориентированный граф на n вершинах. Каждой вершине v сопоставлено целое неотрицательное число $a_v < 2^{22}$. Вершины v и u соединены ребром тогда и только тогда, когда $a_v \& a_u = 0$. Найдите количество компонент связности в получившемся графе.

Задача 7. В изначально пустой двудольный граф по очереди добавляются рёбра, всего происходит m добавлений. После каждого добавления необходимо говорить размер максимального паросочетания. Суммарное время работы должно составлять $O(nm)$.

Задача 8. Научитесь правильно красить рёбра d -регулярного двудольного графа в d цветов за а) $O(n \cdot m \cdot d)$ б) $O(n \cdot m \cdot \log d)$.

Задача 9. Дано N различных прямых. Нужно выбрать максимальное по размеру подмножество прямых такое, что никакие две прямые не параллельны, и никакие прямые не пересекаются в точке с $x = 0$ за полиномиальное от N время.

Задача 10. Дан неориентированный граф, вершины которого нужно покрасить правильным образом в n цветов. Однако для каждой вершины v известно, что ее можно покрасить только либо в цвет $a[v]$, либо в цвет $b[v]$. Найдите правильную раскраску графа за $O(n + m)$.

Задача 11. Дан ориентированный ациклический граф. Вершина A называется важной, если для любой другой вершины B существует путь либо из A в B , либо из B в A . Требуется за $O(n + m)$ найти все:

- Важные вершины
- Такие вершины, что при удалении какой-то одной другой вершины из графа, она становится важной.

Задача 12. Найти за $O(VE)$ лексикографически минимальное из минимальных по размеру вершинных покрытий.

Задача 13. Предложите алгоритм, который за $O(n + m)$ строит компоненты вершинной двусвязности. Компонентой вершинной двусвязности графа называется максимальный по включению набор рёбер, такой что любые два ребра из него лежат на вершинно-простом цикле.

Задача 14. Постройте матрицу $n \times n$, состоящую из стенок и пустых клеток, на которой при выполнении bfs-а из правого нижнего угла размер очереди будет $\omega(n)$. Ходить можно между вершинами, смежными по стороне.

Задача 15. (*) Постройте матрицу $n \times n$, состоящую из стенок и пустых клеток, на которой при выполнении bfs-а из правого нижнего угла размер очереди будет $\omega(n^2)$. Ходить можно между вершинами, смежными по стороне.

Задача 16. (*) Требуется за $O(n + m)$ найти какую-нибудь вершину, лежащую в пересечении всех циклов ориентированного графа.

Задача 17. (*) Есть n людей, изначально человек номер 1 знает секрет. Происходит m встреч: между парой людей a_i и b_i в момент времени t_i , все t_i различны. Если к этому моменту времени кто-то из пары знал секрет, то после встречи оба знают секрет. Вы можете отменить одну любую встречу. Какое наименьшее число людей могут знать секрет после всех встреч? Асимптотика $O(n + m)$.

Задача 18. (*) Пусть в двудольном графе степени всех вершин одинаковые и равны 2^k для некоторого целого неотрицательного k . Предложите алгоритм поиска совершенного паросочетания в этом графе за $O(n + m)$.

Задача 19. (*) Дан произвольный неориентированный граф. Покройте все его вершины простыми непересекающимися циклами.

Задача 20. (*) Вам дана матрица размера $n \times m$, в которой есть ячейки, в которых стоят стрелочки. Стрелочки можно перенаправить в четыре стороны: вверх, вниз, влево, вправо. Однако направлять стрелочки можно только в сторону других стрелочек (то есть нельзя направлять на пустые ячейки и границы матрицы). Двигаться по стрелочкам можно только в соседние клетки. Вам нужно придумать такой способ расстановки стрелочек, чтобы:

- a) Количество циклов было максимально.
- b) Количество циклов было минимально.

Задача 21. (*) Дан граф на $n \leq 10^5$ вершинах и $m \leq 10^5$ ребрах. Необходимо выбрать в нем две различные вершины s и t и построить между ними 3 реберно и вершинно простых пути, каждые два из которых были бы реберно и вершинно не пересекающимися (за исключением вершин s и t), либо сказать, что это невозможно.

Задача 22. (**) Найти совершенное паросочетание в d -регулярном графе за $O(n \log n)$, если считать, что d — константа.