Взвешенные графы

Задачи

Кратчайшие пути

Задача 1. a) Дан взвешенный граф на n вершинах. Веса всех ребер — **вещественные** числа от 1 до 2. Требуется найти кратчайшие расстояния от вершины 1 до всех остальных вершин за $O(n+m)$.

b) Можно ли сделать то же самое, если веса лежат в промежутке от 0 до 1?

c) Дан взвешенный граф на n вершинах. Веса всех рёбер — целые числа от k до $2k$. Требуется найти кратчайшие расстояния от вершины 1 до всех остальных вершин за $O(n+m)$.

Задача 2. Докажите, что алгоритм Дейкстры работает за $\mathcal{O}(2^n \cdot (n+m))$ на графе с произвольными целочисленными весами без отрицательных циклов.

Задача 3. Дан взвешенный граф на n вершинах и m рёбрах, а также заданы две пары вершин (s, t) и (v, u). Можно выбрать какой-то кратчайший путь из s в t и заменить веса всех ребёр на нём на 0. Какого минимального расстояния между v и u можно добиться? Время $\mathcal{O}(n + m \log m)$.

Задача 4. Дана система из m неравенств на n переменных вида $x_i - x_j \le \delta_{ij}$. Пусть все $\delta_{ij} \ge 0$, $x_0 = 0$. Нужно найти решение, максимизирующее сумму всех x_i, за $\mathcal{O}(n + m \log n)$

Задача 5. Дан граф на n вершинах. Однако его ребра заданы весьма необычным образом. Есть m групп ребер. Каждая группа ребер определяется четырьмя числами: t, v, l, r и w, что соответствует тому, что все вершины с номерами от l до r соединены ребром веса w с v. При этом если $t = 1$, то все эти ребра из группы направлены из v, а если $t = 2$, то все ребра направлены в v. Необходимо найти длины кратчайших путей от вершины s до всех остальных вершин.

a) $\mathcal{O}((n + m) \log^2 n)$ b) $\mathcal{O}((n + m) \log n)$

СНМ

Задача 6. Дан граф на n вершинах, а также q запросов. Каждый запрос — ребро (u, v). Если после добавления этого ребра граф является двудольным, необходимо добавить его, иначе добавлять его не нужно. Для каждого запроса узнать, было ли добавлено ребро.

Задача 7. Даны n клеток, покрашенных в цвет 0, а также q запросов покраски отрезка $[l; r]$ в цвет c. Для каждой клетки найти итоговый цвет. Время $\mathcal{O}(n + q \cdot \alpha(q, n))$.

Задача 8. Дан массив размера n. Надо в онлайне отвечать на 2 типа запросов: добавить число в конец, минимум на суффиксе. Асимптотика $\mathcal{O}((n + q) \cdot \alpha(q, n))$.

Остовы

Задача 9. Дан взвешенный граф. Дано минимальное остовное дерево на нем. У ребра поменяли вес. Найти новое минимальное остовное дерево за $\mathcal{O}(n + m)$.

Задача 10. Докажите, что максимальный вес ребра на пути между парой вершин в минимальном остове не зависит от выбора конкретного минимального остова.

Задача 11. За $\mathcal{O}(m \log n)$ сделать предпосчёт, а затем для любой пары вершин за $\mathcal{O}($размера ответа$)$. возвращать путь между a_i и b_i, в котором минимальный вес ребра максимален.

Задача 12. Найти путь из s в t, в котором сумма k максимальных ребер минимальна за $\mathcal{O}((n + m) poly(\log n))$.

a) $k = 1$

b) $k = 2$

c) $k = 3$

Задача 13. Можно узнать сумму на подотрезке массива с i по j за c_{ij}. Выбрать такое множество отрезков, что они однозначно позволяют восстановить массив и имеют минимальную суммарную стоимость. $\mathcal{O}(n^2)$.

Задача 14. Дан связный неориентированный взвешенный граф с n вершинами и m ребрами. Рассмотрим некоторое ребро. Для него определим наибольший возможный вес, который можно присвоить этому ребру, чтобы оно содержалось во всех минимальный покрывающих деревьях данного графа.

Требуется для каждого ребра посчитать максимальный вес по описанным правилам. При этом для каждого ребра ответ должен считаться независимо, то есть в графе может существовать максимум одно ребро с измененным весом.

Асимптотика $\mathcal{O}((n + m) \log n)$.

Ещё задачи

Задача 15. Дан ациклический ориентированный граф на n вершинах и m рёбрах. На каждом ребре написана какая-то буква. Найти лексикографически минимальный простой путь из вершины 1 в вершину n за время $\mathcal{O}(n + m \log n)$.

Задача 16. Дан ориентированный взвешенный граф на n вершинах и m рёбрах, веса рёбер — натуральные числа, не превосходящие C. Найти округленный вверх средний вес минимального средневзвешенного цикла за время $\mathcal{O}(nm \log C)$. Средний вес цикла — сумма весов рёбер, делённая на количество рёбер.

Задача 17. (*) Дано m рёбер, пронумерованных от 1 до m. Ответить на q запросов: «является ли граф, образованный рёбрами подотрезка $[l; r]$, двудольным?». Время:

а) $\mathcal{O}((m + q)\sqrt{m} \log m)$;
б) $\mathcal{O}(m \log^3 m + q \log n)$;
в) $\mathcal{O}(m \log^2 m + q \log n)$

Задача 18. (*) Постройте пример, на котором алгоритм Дейкстры работает за $2^{\Omega(n)}$.

Задача 19. (*) Постройте пример, на котором алгоритм Форда-Беллмана с очередью работает за $\Omega(n \cdot m)$.

Задача 20. (*) Рёберным графом называется граф, в котором вершины соответствуют рёбрам в изначальном графе (и имеют тот же вес). Причём для каждой пары рёбер, смежных одной и той же вершине A начального графа, есть ребро между соответствующим им вершинам с весом равным весу A в начальном графе. Требуется за $\mathcal{O}(m \cdot \alpha(m, n))$ найти вес минимального остовного дерева в:

a) Рёберном графе
b) Рёберном графе рёберного графа

Задача 21. (*) Постройте тест, на котором n запросов к СНМ-у размера n с эвристикой сжатия путей, но без ранговой эвристики, работают за $\Omega(n \log n)$.

Задача 22. (*) Дан взвешенный полный граф на n вершинах. Каждой вершине соответствует число $a_v \le C$. Вес ребра (v, u) равен $a_v \oplus a_u$ (XOR). Найти минимальный остов. Время $\mathcal{O}(n \log n \log C)$.

Задача 23. (*) Дан граф на n вершинах и m рёбрах. Для каждой вершины требуется найти вес минимального остова, содержащего все рёбра, смежные с данной вершиной. Время $\mathcal{O}(m \log n)$.