### Обозначения

$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ — существуют такие числа $a$ и $b$, что для всех $n$: $f(n) \le a + bg(n)$.

$a \equiv b \pmod{m}$ — $a$ и $b$ имеют одинаковые остатки при делении на $m$.

### Задачи

**Определение.** Функция Эйлера $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел не больших $n$, которые взаимно просты с $n$.

Если число $n$ имеет разложение на простые числа в виде $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, то

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

или иначе говоря

$$(p_1 - 1) \cdot p_1^{a_1 - 1} \cdot (p_2 - 1) \cdot p_2^{a_2 - 1} \cdot \ldots \cdot (p_k - 1) \cdot p_k^{a_k - 1}$$

**Определение.** (*Теорема Эйлера*) Для любого числа $k$ взаимно простого с $n$, $k^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Частный случай этой теоремы при простом $n$ называется *малой теоремой Ферма*. Этот случай примечателен тем, что $\varphi(p) = p - 1$ для простого $p$, поэтому теорема принимает совсем простой вид.

**Задача 1.** Сравните следующие асимптотики между собой:
a) $\mathcal{O}(\log(\min(a, b)))$
b) $\mathcal{O}(\log(\max(a, b)))$
c) $\mathcal{O}(\log(a + b))$
d) $\mathcal{O}(\log(a \cdot b))$
e) $\mathcal{O}(\log(a^{14} + a \cdot b + b^2))$

**Задача 2.** Найти количество натуральных чисел, которые меньше $n$ и взаимно просты с числом $m$, за $\mathcal{O}(\sqrt{m})$.

**Задача 3.** Найти сумму НОД по всем подотрезкам массива натуральных чисел, не больших $C$, за $\mathcal{O}(n \log C)$.

**Задача 4.** Докажите, что при $n > 2$ число $\varphi(n)$ является четным.

**Задача 5.** Найти сумму НОД по всем непустым подмножествам массива из $n$ натуральных чисел, не больших $C$, за $\mathcal{O}(n + C \log C)$. Ответ найдите по модулю $10^9 + 7$.

**Задача 6.** Найдите сумму всех простых чисел от 1 до $n$ за $\mathcal{O}(n \log \log n)$ времени и $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ памяти.

**Задача 7.** Дан массив $a$ длины $n \le 10^6$. Назовем $k$-разбиением такое разбиение массива $a$ на подотрезки, что длины всех подотрезков (кроме, возможно, последнего) равны $k$. Силой подотрезка назовем куб суммы его элементов. Необходимо для каждого $k$ от 1 до $n$ посчитать сумму сил всех подотрезков в $k$-разбиении массива $a$.

**Задача 8.** Дан массив $a$ длины $n$. Назовем **идеальным** $k$-разбиением такое разбиение массива $a$ на подотрезки, что длины всех подотрезков (**включая последний**) равны $k$. Мощностью подотрезка длины $k$ назовем куб суммы $k$-х степеней его его элементов по модулю $10^9 + 7$. Необходимо для всех $k$ от 1 до $n$, для которых существует идеальное $k$-разбиение, посчитать сумму мощностей всех подотрезков в этом $k$-разбиении массива $a$. Асимптотика $\mathcal{O}(n^{5/4})$.

**Задача 9.** Докажите, что в процессе работы расширенного алгоритма Евклида все $x_i$ не превосходят $b_i$ по модулю, а все $y_i$ не превосходят $a_i$ по модулю. Из чего следует, что если входные данные алгоритма Евклида помещаются в какой-то тип данных, то и во время вычислений не произойдет никаких переполнений.

**Задача 10.** Найдите сумму геометрической прогрессии длины $n$ по произвольному модулю за a) $\mathcal{O}(\log^2 n)$ b) $\mathcal{O}(\log n)$.

**Задача 11.** Перемножьте два числа $a$ и $b$ по модулю $m \le 10^{18}$ на C++ без использования `int128` за
a) $\mathcal{O}(\log m)$
b) $\mathcal{O}(1)$

**Задача 12.** За $\mathcal{O}(n)$ для каждого числа от 1 до $n$ найдите:

**a.** Количество его делителей.

**b.** Сумму его делителей.

**c.** Функцию Эйлера от него.

**Задача 13.** Обозначим за $p_k$ $k$-е по возрастанию простое число. Найдите все такие натуральные $k$, что $\frac{p_{p_k} + p_{(p_k+1)}}{2}$ — простое число.

**Задача 14.** Дан массив $a$ длины $n$. Необходимо для каждого $k$ от 1 до $n$ посчитать сумму элементов массива $a$ на позициях, делящихся на $k$ ($a_0 + a_k + a_{2k} + \ldots$) за a) $\mathcal{O}(n \log n)$ b) $\mathcal{O}(n \log \log n)$.

**Задача 15.** Назовем суммирующей функцией Эйлера $\varphi_\Sigma(n)$ сумму всех натуральных чисел, не больших $n$, которые взаимно просты с $n$. Придумайте формулу для $\varphi_\Sigma(n)$.

**Задача 16.** Назовём натуральное число кубастым, если его можно представить в виде $a^3 \cdot b$ для каких-то натуральных $a > 1, b \geq 1$. Найти количество кубастых чисел, не больших $n \leq 10^{18}$.

**Задача 17.** a) Найдите обратные ко всем числам от 1 до $n$ по простому модулю $p$ ($n < p$) за $\mathcal{O}(n)$.

b) Даны числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а также простой модуль $p$. Необходимо найти обратные по модулю $p$ ко всем $a_i$ за $\mathcal{O}(n + \log p)$.

**Задача 18.** Даны два числа $a$ и $b$. Проверьте, влезает ли их произведение в тип `long long`.

**Задача 19.** Пусть $n \geq p$. Обозначим за $n!_p$ число, полученное из $n!$ делением его на $p$ пока делится. Посчитайте $n!_p$ по модулю $p$ за a) $\mathcal{O}(p \log_p n)$ b) $\mathcal{O}(p + \log_p n)$.

**Задача 20.** Дан массив $a$ длины $n \leq 10^5$ ($1 \leq a_i \leq 10^5$). Поступают $q \leq 10^5$ запросов вида «домножить элемент массива $a$ на позиции $i$ на $x$» ($1 \leq x \leq 10^5$). После каждого запроса необходимо вывести НОД всех элементов массива $a$, взятый по модулю $10^9 + 7$.

**Задача 21.** Дан массив $a$ длины $n \leq 10^6$ ($1 \leq a_i \leq 10^7$). Необходимо найти пару его элементов с наименьшим значением НОКа.

**Задача 22.** (*) Научитесь выполнять $n$ запросов поиска дискретного логарифма (найти такое $x_i$, что $a_i^{x_i} \equiv b_i \pmod p$) по простому модулю $p$ за $\mathcal{O}\left(\sqrt{p \cdot n} + n \log p\right)$.

**Задача 23.** (**) Найдите количество простых чисел от 1 до $n$ за $\mathcal{O}(n^{2/3})$.

**Задача 24.** (**) Докажите, что представленный код поиска обратного по произвольному модулю работает, и найдите его асимптотику:

```
int inv(int a) {
    if(a == 1) {
        return 1;
    }
    return MOD - (long long) MOD / a * inv(MOD % a) % MOD;
}
```

**Задача 25.** (***) Докажите, что количество делителей $d(n)$ числа $n$ — это субполиномиальная величина. То есть для любого $\varepsilon > 0$ верно, что $\frac{d(n)}{n^\varepsilon} \to 0$ при $n \to +\infty$ (иными словами, $d(n) = o(n^\varepsilon)$).

**Задача 26.** (******) Правда ли, что для любого натурального $n$ существует натуральное $m \neq n$ такое что $\varphi(n) = \varphi(m)$?