

Список вопросов зачета

Каждый вопрос вы можете сдавать только если вы его нашли в книжке на карте. Успешная сдача каждого вопроса принесет вам некоторое число очков. Сколько приносит вопрос, указано в скобках сразу после его номера. Сдавать свои согласованные алгоритмы можно в любой момент времени.

Вопрос 1. (20) Расскажите алгоритм Гаусса.

Вопрос 2. (20) Расскажите алгоритм Борувки с оценкой асимптотики.

Вопрос 3. (20) Предложите способ (и докажите корректность) выбрать случайную точку на поверхности сферы за время $\mathcal{O}(1)$.

Вопрос 4. (20) Предложите способ найти число (по какому-нибудь модулю) путей длины не более k между каждой парой вершин графа за $\mathcal{O}(n^3 \log k)$

Вопрос 5. (25) Предложите алгоритм сортировки массива во внешней памяти за $\mathcal{O}\left(\frac{N}{B} \log \frac{M}{B} \frac{N}{B}\right)$.

Вопрос 6. (30) Покажите, что математическое ожидание длины наибольшей возрастающей подпоследовательности случайной перестановки есть $\Omega(\sqrt{n})$ (т.е. асимптотически она не меньше).

Вопрос 7. (30) Докажите теорему Люка.

Вопрос 8. (30) Докажите лемму Холла.

Вопрос 9. (30) Расскажите биномиальную кучу вместе с оценкой асимптотики.

Вопрос 10. (30) Сформулируйте модели вычислимости «машина Тьюринга» и «недетерминированная машина Тьюринга». Определите классы сложности P, NP и NP-Complete.

Вопрос 11. (35) Расскажите алгоритм Куна.

Вопрос 12. (35) Расскажите алгоритм Фараха-Колтона и Бендера.

Вопрос 13. (35) Расскажите битовый эффективный алгоритм — альтернативу алгоритму Фараха-Колтона и Бендера.

Вопрос 14. (35) Расскажите алгоритм Ji Driver Segment Tree (min =, sum на отрезке) с оценкой асимптотики $\mathcal{O}((n+q) \log n)$

Вопрос 15. (40) Предложите алгоритм решения задачи 3-SAT за время $\mathcal{O}(1.333^n)$.

Вопрос 16. (40) Расскажите алгоритм вычисления факториала по простому модулю (без степеней вхождения p) за $\mathcal{O}\left(\sqrt{\min(n,p)} \log n\right)$

Вопрос 17. (40) Расскажите алгоритм извлечения квадратного корня по простому модулю за $\mathcal{O}(\log p)$

Вопрос 18. (45) Предложите алгоритм проверки того, что произведение матриц A и B равно матрице C за $\mathcal{O}(n^2)$, где A , B и C — матрицы $n \times n$, такой чтобы вероятность ошибки была достаточно мала.

Вопрос 19. (50) Предложите алгоритм поиска количества пар взаимно простых чисел, не больших n , за $\mathcal{O}(n^{2/3})$.

Вопрос 20. (50) Дан массив A длины n ($1 \leq n \leq 10^6$). Необходимо найти $\max_{1 \leq i < j < k \leq n} (A_i | (A_j \& A_k))$.

Вопрос 21. (50) Расскажите решение задачи list-ranking во внешней памяти за $\mathcal{O}(\text{Sort}(N))$.

Вопрос 22. (50) Дано дерево на n ($n \leq 10^6$) вершинах. Посчитать количество способов раскрасить его листья так, что для любых листьев a , b , c и d таких, что a и b одного цвета, c и d одного цвета, и a и c разного цвета, пути $a \rightarrow b$ и $c \rightarrow d$ не пересекаются.

Вопрос 23. (50) Дано дерево на n вершинах и m пар путей. Для каждой пары путей фиксирован цвет. Требуется покрасить все вершины графа в некоторые цвета так, чтобы для каждой из заданных m пар путей хотя бы один был фиксированного для этой пары цвета (или сказать, что это невозможно). $\mathcal{O}(n + m \log m)$.

Вопрос 24. (50) Дано мультимножество из n чисел. Поступают q запросов вида «поменять знак всем числам, меньшим (или большим) x ». В конце нужно вывести получившийся массив. $\mathcal{O}((n+q) \log n)$.

Вопрос 25. (50) Дана бинарная строка s ($1 \leq |s| \leq 10^6$). Можно производить операции следующего вида: взять два соседних символа строки и заменить их на их максимум. Требуется найти количество строк, которые можно получить такими операциями.

Вопрос 26. Предложите способ реализовать B-дерево во внешней памяти, в котором операции добавления, удаления и поиска работают в онлайне за:

a) (35) $\mathcal{O}(\log_B N)$;

b) (15) $\mathcal{O}(\log_B N)$, при этом амортизированное число операций записи равно $1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{B}\right)$.

Вопрос 27. (50) Предложите способ построить остовное дерево во внешней памяти за время $\mathcal{O}(\text{Sort}(E) \log V)$.

Вопрос 28. (50) Предложите способ реализовать BFS во внешней памяти за $\mathcal{O}(\text{Sort}(E) + V)$.

Вопрос 29. (55) Необходимо посчитать количество способов расставить цифры от 1 до 3 в квадрате $k \times k$ ($k \leq 10^6$) так, чтобы хотя бы одна строка или столбец состояли из одинаковых цифр.

Вопрос 30. (55) Придумайте алгоритм для ответа на q запросов вида «Найти сумму количеств делителей для всех квадратов чисел от 1 до n_i ». $q \leq 10^4$, $n_i \leq 10^{12}$.

Вопрос 31. (55) Расскажите решето Аткина.

Вопрос 32. (55) Расскажите алгоритм 2 китайцев.

Вопрос 33. (65) Расскажите алгоритм построения дерева доминаторов за $\mathcal{O}(m \log n)$.

Вопрос 34. (65) Расскажите венгерский алгоритм.

Вопрос 35. (70) Расскажите алгоритм Штор-Вагнера.

Вопрос 36. (70) Расскажите алгоритм Каргера — Штейна.

Вопрос 37. (70) Расскажите дерево палиндромов.

Вопрос 38. (70) Расскажите алгоритм поиска минимального остовного дерева за линейное время.

Вопрос 39. (80) Расскажите Фибоначчиеву кучу вместе с оценкой асимптотики.

Вопрос 40. (80) Расскажите алгоритм GCD Ji Driver Segment Tree ($\min =$, $\max =$, присвоение на отрезке, $+$, $=$, sum на отрезке, gcd на отрезке) с оценкой асимптотики $\mathcal{O}(n(\log n + \log C) + q \log n(\log n + \log C))$

Вопрос 41. (80) Расскажите splay-дерево вместе с оценкой асимптотики.

Вопрос 42. (80) Расскажите алгоритм проталкивания предпотока вместе с оценкой асимптотики.

Вопрос 43. (80) Предложите способ реализовать онлайн кучу во внешней памяти, в которой операции добавления, удаления минимума и поиска минимума работают амортизировано за $\mathcal{O}\left(\frac{1}{B} \log \frac{M}{B} \frac{N}{B}\right)$.

Вопрос 44. (90) Расскажите суффиксный автомат с доказательством линейного времени работы.

Вопрос 45. Расскажите Link-Cut Tree вместе с оценкой асимптотики

а) (60) $\mathcal{O}(\log^2 N)$;

б) (30) $\mathcal{O}(\log N)$.

Вопрос 46. Расскажите алгоритм поиска паросочетания в произвольном графе за $\mathcal{O}(n^3)$

а) (60) Без доказательства основной теоремы ботаники (о том, что сжатие соцветия не уменьшает паросочетание);

б) (40) С доказательством основной теоремы ботаники.

Вопрос 47. (200) Расскажите Fusion tree.

Вопрос 48. (200) Расскажите алгоритм поиска взвешенного паросочетания в произвольном графе за любое полиномиальное время работы

Вопрос 49. (200) Симплекс метод.

Вопрос 50. (300) Расскажите алгоритм для решения задачи «присвоение на отрезке, $\% =$ на отрезке и сумма на отрезке» за $\mathcal{O}((n + q) \log n \log C)$

Вопрос 51. (1000) Научитесь искать минимум на пути в дереве за $\mathcal{O}(n)$ предподсчёта и:

а) (500) $\mathcal{O}(1)$ в оффлайне

б) (1000) $\mathcal{O}(1)$ в онлайн для целых чисел

Вопрос 52. (100000) Расскажите алгоритм Торупа.

Вопрос 53. (100000) Расскажите Q-Tree (сет размера $\mathcal{O}(\log n)$ с предподсчётом за $\mathcal{O}(n)$ и всеми операциями за линейное время работы).