Во всех задачах n — число вершин в графе, m — число рёбер.

Задача 1. Предложите алгоритм, который за $O(m)$ строит компоненты вершинной двусвязности. Компонентой вершинной двусвязности графа называется максимальный по включению подграф (состоящий из вершин и ребер), такой что любые два ребра из него лежат на вершинно-простом цикле.

Задача 2. Предложите способ за $O(m)$ найти:
a) Цикл нечётной длины в неориентированном графе
b) Цикл нечётной длины в ориентированном графе
c) Цикл чётной длины в неориентированном графе

Задача 3. Дан невзвешенный неориентированный граф. Требуется найти кратчайший путь между двумя вершинами в его дополнении. Время работы должно составлять $O(n + m)$.

Задача 4. Рассмотрим некоторый неориентированный граф. Удалим все его рёбра и будем добавлять из заново в некотором порядке. Требуется добавлять рёбра по одному и после каждого добавления сообщать количество мостов в графе. Порядок добавления изначально не известен, то есть запросы требуется обрабатывать online. Общее время работы должно составить $O(m \log m)$.

Задача 5. Дан ориентированный ацикличный граф. Вершина A называется важной, если для любой другой вершины B существует путь либо из A в B, либо из B в A. Требуется за $O(n + m)$ найти все:
a) Важные вершины
b) Такие вершины, что при удалении какой-то одной вершины из графа она становится важной.

Задача 6. Требуется за $O(n+m)$ найти какую-нибудь вершину, лежащую в пересечении всех циклов ориентированного графа.

Задача 7. (Лемма Холла) Пусть в двудольном графе для любого подмножества вершин A_i из первой доли множество всех вершин из второй доли, смежный по ребру с хотя бы одной вершиной из A_i обозначается как B_i. Докажите, что в графе есть совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $|A_i| \leq |B_i|$ для всех A_i.

Задача 8. Докажите, что в регулярном двудольном графе есть совершенное паросочетание.

Задача 9. * Пусть в двудольном графе степени всех вершин равны 2^k для некоторого целого неотрицательного k.
Предложите алгоритм поиска совершенного паросочетания в этом графе за $O(m)$.

Задача 10. В изначально пустой двудольный граф по очереди добавляются рёбра, всего происходит m добавлений. После каждого добавления необходимо говорить размер максимального паросочетания. Суммарное время работы должно составлять $O(nm)$

Задача 11. Дан двудольны граф и некоторое максимальное паросочетание в нём. Требуется:
a) За $O(nm)$ найти все рёбра, лежащие во всех максимальных паросочетаних.
b) За $O(nm)$ найти все рёбра, лежащие хотя бы в одном максимальном паросочетании.
c) За $O(m)$ найти все рёбра, лежащие во всех максимальных паросочетаних.
в) За $O(m)$ найти все рёбра, лежащие хотя бы в одном максимальном паросочетании.

Задача 12. Дан ориентированный граф. За один ход можно удалить все входящие или все исходящие ребра одной вершины (но не одновременно). Удалить все рёбра графа за min число ходов.

Задача 13. Дан ориентированный ацикличный граф. Предложите алгоритм поиска минимального по мощности множества путей, покрывающих все вершины графа.
a) Пути не могут пересекаться по вершинам, время работы $O(nm)$.
b) Пути могут пересекаться по вершинам, время работы $O(n^3)$.

Задача 14. Дан двудольный граф, у каждой вершины есть вес. Требуется за $O(nm)$ построить паросочетание такое, что сумма весов всех вершин, входящих в паросочетание была максимальна, если:
a) Веса всех вершин второй доли равны нулю.
b) Веса всех вершин неотрицательны.

Задача 15. Вам дана матрица размера $n \times m$, в которой есть ячейки, в которых стоят стрелочки. Стрелочки можно перенаправить в четыре стороны: вверх, вниз, влево, вправо. Однако направлять стрелочки можно только в сторону других стрелочек (то есть нельзя направлять на пустые ячейки и границы матрицы). Двигаться по стрелочкам можно только в соседние клетки. Вам нужно придумать такой способ расстановки стрелочек, чтобы:
a) Количество циклов было максимально.
b) Количество циклов было минимально.

Задача 16. Из строки длиной n выписали все подстроки длины k, а потом стёрли саму строку. Требуется за $O(nk)$ по выписанным строкам восстановить исходную строку.

Задача 17. Дан граф, где не рёбрах написаны 0 и 1. За одно действие можно заменить на противоположное все числа на произвольном (не обязательно простом) пути в графе. Требуется за $O(n+m)$ найти способ за минимальное число действий сделать числа на всех рёбрах равными 0.