Разбор задачи «Варя и расписание школьных этапов»

Формальная постановка задачи такая: вам дано дерево, нужно посчитать количество перестановок его вершин, таких что вершины никакого ребра не соседние в этой перестановке.

Для того, чтобы решить первую подгруппу, можно просто перебрать все перестановки вершин дерева, которых $n!$ и проверить каждую из них. Время работы $O(n! \cdot n)$.

Чтобы набрать больше баллов в этой задаче нужно применить формулу включений исключений. А именно, пронумеруем ребра числами от 1 до $n-1$. Обозначим за A_i множество перестановок, в которых вершины i-го ребра стоят рядом (для всех $1 \leqslant i \leqslant n-1$). Тогда $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}|$ это количество плохих перестановок, а $n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}|$ это ответ на задачу.

По формуле включений исключений $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}| = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n} (-1)^{k+1} \cdot |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$. Изучим, чему может быть равно $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$. Оставим в дереве только ребра $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Тогда степень любой вершины на этих ребрах должна быть $\leqslant 2$. Обозначим количество компонент связности за c, количество изолированных вершин за l. Тогда нетрудно понять, что $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = c! \cdot 2^{c-l}$.

Для того, чтобы пройти вторую подгруппу, можно перебрать все непустые подмножества ребер и для каждого из них посчитать размер пересечения по описанной формуле. Время работы $O(2^n \cdot n)$.

Как мы поняли, размер пересечения равен $c! \cdot 2^{c-l}$. Заметим, что $c = n-k$, где k —это количество оставленных нами ребер. Тогда размер пересечения равен $(n-k)! \cdot 2^{n-k-l} = (n-k)! \cdot 2^{n-k} \cdot \frac{1}{2^l}$. Тогда давайте для всех k от 1 до $n-1$ посчитаем сумму по всем подмножествам размера k величины $\frac{1}{2^l}$. Тогда из этих значений мы сможем найти ответ.

Считаем следующую динамику на дереве: $dp_{f,v,k}$ — это сумма $\frac{1}{2^l}$ по всем подмножествам ребер поддерева вершины v, таким что их размер равен k и из вершины v выходит f ребер вниз. При этом $0 \leqslant f \leqslant 2$. Такая динамика имеет несложный пересчет, схожий с динамикой рюкзака на дереве. Общее время работы получается $O(n^2)$.