

Продвинутые графы

Задачи

Задача 1. Дан ориентированный ациклический граф на n вершинах рёбрах, каждое из которых либо красное, либо синее, притом для любых двух различных вершин u и v либо существует ребро, ведущее из u в v , либо ребро, ведущее из v в u . Определите, существует ли такая пара вершин (u, v) , что существует путь из u в v , содержащий только красные рёбра, а также путь из u в v , содержащий только синие рёбра. Время $\mathcal{O}(n^2)$.

Задача 2. Дан ориентированный граф на n вершинах и m рёбрах, каждое покрашено в один из m цветов. Необходимо в нем найти рёберно-простой цикл, в котором все соседние ребра имеют различные цвета. Решите задачу за время:

- а) $\mathcal{O}(n + m^2)$;
- б) $\mathcal{O}(n + m)$.

Задача 3. Дан взвешенный граф на n вершинах. Для данного k требуется за $\mathcal{O}(n^3)$ найти такие k вершин, что число кратчайших путей от 1 до n , проходящих через все эти вершины, максимально.

СНМ

Задача 4. Дан граф на n вершинах и m рёбрах, а также $q \leq m$ запросов удаления рёбер. После каждого запроса необходимо узнать количество компонент связности. Время $\mathcal{O}(n + m \cdot \alpha(m, n))$.

Задача 5. Дан граф на n вершинах, а также q запросов. Каждый запрос — ребро (u, v) . Если после добавления этого ребра граф является двудольным, необходимо добавить его, иначе добавлять его не нужно. Для каждого запроса узнать, было ли добавлено ребро. Время:

- а) $\mathcal{O}(n + q \log n)$;
- б) $\mathcal{O}(n + q \cdot \alpha(q, n))$.

Задача 6. Дан граф на n вершинах, а также q запросов двух типов:

1. Добавить ребро (u, v) . *Гарантируется, что граф останется ациклическим.*
2. Узнать самую далёкую от v вершину среди достижимых.

Время $\mathcal{O}((n + q) \log n)$.

Задача 7. Даны n клеток, покрашенных в цвет 0, а также q запросов покраски отрезка $[l; r]$ в цвет c . Для каждой клетки найти итоговый цвет. Время $\mathcal{O}(n + q \cdot \alpha(q, n))$.

Задача 8. Рёберным графом называется граф, в котором вершины соответствуют рёбрам в изначальном графе (и имеют тот же вес). Причём для каждой пары рёбер, смежных одной и той же вершине A начального графа, есть ребро между соответствующим им вершинам с весом равным весу A в начальном графе. Требуется за $\mathcal{O}(m \cdot \alpha(m, n))$ найти вес минимального остовного дерева в:

- а) Рёберном графе
- б) Рёберном графе рёберного графа

Остовы

Определение. Минимально узкое остовное дерево — остовное дерево с минимальным весом максимального по весу ребра.

Задача 9. Является ли:

- а) минимальное остовное дерево минимально узким остовным деревом?
- б) минимально узкое остовное дерево минимальным остовным деревом?

Задача 10. Дан взвешенный граф на n вершинах и m рёбрах, а также какой-то его остов. Проверьте, что этот остов является минимально узким. Время $\mathcal{O}(n + m \log m)$.

Задача 11. Дан граф на n вершинах и m рёбрах, а также q запросов поиска максимального по весу ребра в пути между v и u с минимальным весом максимального по весу ребра. Время $\mathcal{O}(n + m \log m + q \log n)$.

Задача 12. Можно узнать сумму на подотрезке массива с i по j за c_{ij} . Выбрать такое множество отрезков, что они однозначно позволяют восстановить массив и имеют минимальную суммарную стоимость. $\mathcal{O}(n^2)$.

Задача 13. Дан взвешенный полный граф на n вершинах. Каждой вершине соответствует число $a_v \leq C$. Вес ребра (v, u) равен $a_v \oplus a_u$ (XOR). Найти минимальный остов. Время $\mathcal{O}(n \log n \log C)$.

Задача 14. Дан граф на n вершинах и m рёбрах. Для каждой вершины требуется найти суммарный вес всех рёбер минимального остова, содержащего все рёбра, смежные с данной вершиной. Время $\mathcal{O}(m \log m)$.

Задача 15. Дан взвешенный граф и какой-то остов в нём. Вершина A называется столицей, если для любой другой вершины B самое короткое ребро на пути от A до B не длиннее самого короткого ребра на пути от A до B по остову. Требуется за $O(m \log n)$ найти все столицы.

Ещё задачи

Задача 16. Дано n бомб на прямой, i -я имеет радиус поражения r_i . Когда бомба взрывается, все бомбы в её радиусе поражения взрываются, и этот процесс рекурсивен. Необходимо для каждой бомбы найти количество бомб, которые взорвутся, если взорвать эту бомбу. $O(n \log n)$.

Задача 17. Дан ациклический ориентированный граф на n вершинах и m рёбрах. На каждом ребре написана какая-то буква. Найти лексикографически минимальный простой путь из вершины 1 в вершину n за время $O(n + m \log n)$.

Задача 18. Дан ориентированный граф на n вершинах и m рёбрах. Найти цикл минимальной длины за время $O(nm)$.

Задача 19. Дан ориентированный взвешенный граф на n вершинах и m рёбрах, веса рёбер — натуральные числа, не превосходящие C . Найти округленный вверх средний вес минимального средневзвешенного цикла за время $O(nm \log C)$. Средний вес цикла — сумма весов рёбер, делённая на количество рёбер.

Задача 20. Дан взвешенный граф на n вершинах и m рёбрах, а также заданы две пары вершин (s, t) и (v, u) . Можно выбрать какой-то кратчайший путь из s в t и заменить веса всех рёбер на нём на 0. Какого минимального расстояния между v и u можно добиться? Время $O(n + m \log m)$.

Задача 21. Дано m рёбер, пронумерованных от 1 до m . Ответить на q запросов: «является ли граф, образованный рёбрами подотрезка $[l; r]$, двудольным?». Время:

- а) $O((m + q)\sqrt{m} \log m)$;
- б) $O(m \log^3 m + q \log n)$;
- в) $O(m \log^2 m + q \log n)$