Потоки в сетях

Определение. Сеть — ориентированный граф $G = (V, E)$, в котором также задано следующее.

- Для каждого ребра задана пропускная способности $c(u, v) \geq 0$. Если $(u, v) \notin E$, то $c(u, v) = 0$.
- Выделено две вершины s и t — исток и сток, соответственно.

Определение. Поток — функция $f(u, v)$ такая, что для любых $u, v \in V$ выполняется:

- ограничение пропускной способности: $f(u, v) \leq c(u, v)$;
- антисимметричность: $f(u, v) = -f(v, u)$;
- сохранение потока: $\sum\limits_{v \in V} f(u, v) = 0$ для любой $u \in V \setminus \{s, t\}$.

Определение. Величина потока $|f|$ — сумма потоков из источника: $|f| = \sum\limits_{v \in V} f(s, v)$.

Определение. s-t-разрез (A, B) — разбиение $V = A \sqcup B$, $s \in A$, $t \in B$.

Определение. Пропускная способность разреза (A, B): $c(A, B) = \sum\limits_{u \in A} \sum\limits_{v \in B} c(u, v)$.

Определение. Поток через разрез (A, B): $f(A, B) = \sum\limits_{u \in A} \sum\limits_{v \in B} f(u, v)$.

Определение. Остаточная сеть G_f потока f в сети (V, E) — сеть (V, E_f), в которой пропускная способность ребра (u, v) равна *остаточной пропускной способности* $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$.

Определение. Увеличивающий путь — путь из s в t в остаточной сети такой, что каждое ребро в пути имеет положительную остаточную пропускную способность.

Определение. Циркуляция — поток, в котором нет истока и стока, то есть для любой вершины выполняется сохранение потока.

Задача 1. Докажите, что поток через разрез равен величине потока.

Задача 2. Докажите, что сумма потоков из источника равна сумме потоков в сток.

Задача 3. Максимальный поток — поток максимальной величины. Докажите:
a) если в остаточной сети есть увеличивающий путь, то поток не максимален;
b) если в остаточной сети нет увеличивающего пути, то поток максимален.

Задача 4. (**Теорема Форда-Фалкерсона**) Докажите, что максимальный поток равен минимальному разрезу. Минимальный разрез — разрез с минимальной пропускной способностью.

— — —

Во всех задачах запрещено использовать стоимостные потоки. То есть можно пользоваться только стандартными потоками с одинаковым весом (но возможно разной пропускной способностью) рёбер.

Задача 5. Дан двудольный граф:
a) сведите поиск паросочетания в нём к поиску потока;
b) для каждой вершины левой доли сказано, с каким максимальным количеством вершин правой доли она может быть связано, аналогично для вершин правой доли, найдите максимальное по размеру множество рёбер, удовлетворяющее условиям.

Задача 6. Дана таблица $n \times n$. Для каждой строки задана сумма чисел в ней, аналогично для столбцов. Восстановите числа в таблице или определите невозможность этого.

Задача 7. Найти в X графе k непересекающихся по Y путей из a в b.
a) X=ориентированном; Y=ребрам
b) X=ориентированном; Y=вершинам
c) X=неориентированном; Y=ребрам
d) X=неориентированном; Y=вершинам

Задача 8. Найти максимальный поток в сети с дополнительным ограничением: для каждой вершины v задано число s_v — максимальный суммарный поток, который может входить в вершину v.

Задача 9. Дан неориентированный граф. Определите, какое минимальное количество вершин необходимо удалить, чтобы из вершины A не была достижима вершина B.

Задача 10. Дана сеть без истока и стока. Требуется найти циркуляцию, в которой величина потока, проходящая через вершину A максимальна.

Задача 11. Дан неориентированный двудольный граф, в котором вершины правой доли пронумерованы от 1 до n. Каждая вершина левой доли связанна с отрезком вершин правой доли (т.е со всеми вершинами с номерами от l_i до r_i). Предложите алгоритм поиска максимального паросочетания за время $O(n^2 \log n)$.

Задача 12. Дано подвешенное дерево из n вершин и k списков вершин дерева суммарной длины m. Рассмотрим двудольный граф, где в левой доле расположены вершины, соответствующие спискам, а в правой — вершины, соответствующие вершинам дерева. Ребро (v, u) проведено тогда и только тогда, когда найдётся вершина w из списка v, притом w является предком u в дереве. Найдите максимальное паросочетание в этом графе за время $O(mn \log n)$.

Задача 13. Дан ограф, для каждого ребра заданы два числа l_i и r_i. Необходимо определить величину потока f_i для каждого ребра так, чтобы выполнялось $l_i \le f_i \le r_i$. Также должно выполняться сохранение потока.

Задача 14. Есть n коллекционеров и m видов монет. Для вступления в клуб, необходимо иметь не меньше одной монеты каждого типа. Вы (у вас номер 1) можете меняться с коллекционерами имеющимися монетами. Любой коллекционер обменяет монету свою монету a на вашу монету b, если у него больше одной монеты типа a и нету ни одной монеты типа b. Вы, в свою очередь, можете нарушать это правило. Нужно набрать как можно больше типов монет.

Задача 15. Дана матрица $n \times m$, каждая клетка изначально покрашена в чёрный или белый цвет. Перекрасить вершину в чёрный стоит B, в белый — W. После того, как вы совершите все необходимые перекрашивания, вы дополнительно заплатите X за каждую пару соседних по стороне клеток различных цветов. Минимизируйте сумму потраченного.

Задача 16. Дан двудольный граф, веса всех вершин положительны. Найдите:

a) Вершинное покрытие минимального веса.

b) Независимое множества максимального веса. (Независимым называется множество вершин, что никакие 2 не связанны ребром)

Задача 17. Дано n инструментов и m работ. У каждого инструмента есть некоторая стоимость a_i, у каждой работы есть гонорар b_i. Для каждой работы указан список необходимых для её выполнения инструментов, при этом после выполнения работы инструменты не исчезают. Требуется купить некоторые инструменты, после чего выполнить некоторые работы, чтобы в итоге получить максимальный доход.

Задача 18. Предложите тест, на котором алгоритм Форда-Фалкерсона (поиск потока с помощью dfs) работает:

a) За размер потока в графе с целочисленными пропускными способностями.

b) За размер потока в графе с целочисленными пропускными способностями, где все рёбра нумерованны, а при работе алгоритма в dfs рассматриваются рёбра в порядке возрастания номеров.

c) Бесконечно долго при не целочисленных пропускных способностях.

Задача 19. Плотностью непустого подграфа называется отношение количества рёбер к количеству вершин. За полиномиальное время найдите подграф максимальной плотности.