Во всех задачах n — число вершин в графе, m — число рёбер.

Задача 1. Предложите алгоритм, который за $O(m)$ строит компоненты рёберной двусвязности. Компонентой вершинной двусвязности графа называется максимальный по включению подграф (состоящий из вершин и ребер), такой что любые два ребра из него лежат на вершинно-простом цикле.

Задача 2. Предложите способ за $O(m)$ найти в **ориентированном** графе цикл:
a) Чётной длины.
b) Нечётной длины.

Задача 3. Дан невзвешенный неориентированный граф. Требуется найти кратчайший путь между двумя вершинами в его дополнении. Время работы должно составлять $O(n + m)$.

Задача 4. Рассмотрим некоторый неориентированный граф. Удалим все его рёбра и будем добавлять из заново в некотором порядке. Требуется добавлять рёбра по одному и после каждого добавления сообщать количество мостов в графе. Порядок добавления изначально не известен, то есть запросы требуется обрабатывать online. Общее время работы должно составить $O(m \log m)$.

Задача 5. Требуется в неориентированном графе за $O(n+m)$ найти такую пару вершин, что её соединяют 3 вершинно и рёберно непересекающихся пути.

Задача 6. Дан ориентированный ацикличный граф. Вершина A называется важной, если для любой другой вершины B существует путь либо из A в B, либо из B в A. Требуется за $O(n + m)$ найти все:
a) Важные вершины
b) Такие вершины, что при удалении какой-то одной вершины из графа она становится важной.

Задача 7. Требуется за $O(n+m)$ найти какую-нибудь вершину, лежащую в пересечении всех циклов ориентированного графа.

Задача 8. (Лемма Холла) Пусть в двудольном графе для любого подмножества вершин A_i из первой доли множество всех вершин из второй доли, смежный по ребру с хотя бы одной вершиной из A_i обозначается как B_i. Докажите, что в графе есть совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $|A_i| \leq |B_i|$ для всех A_i.

Задача 9. Пусть в двудольном графе степени всех вершин равны 2^k для некоторого целого неотрицательного k.
Предложите алгоритм поиска совершенного паросочетания в этом графе за $O(m)$.

Задача 10. В изначально пустой двудольный граф по очереди добавляются рёбра, всего происходит m добавлений. После каждого добавления необходимо говорить размер максимального паросочетания. Суммарное время работы должно составлять $O(nm)$

Задача 11. Дан двудольны граф и некоторое максимальное паросочетание в нём. Требуется:
a) За $O(nm)$ найти все рёбра, лежащие во всех максимальных паросочетаниях.
b) За $O(nm)$ найти все рёбра, лежащие хотя бы в одном максимальном паросочетании.
c) За $O(m)$ найти все рёбра, лежащие во всех максимальных паросочетаниях.
в) За $O(m)$ найти все рёбра, лежащие хотя бы в одном максимальном паросочетании.

Задача 12. Дан ориентированный ацикличный граф. Предложите алгоритм поиска минимального по мощности множества путей, покрывающих все вершины графа.
a) Пути не могут пересекаться по вершинам, время работы $O(nm)$.
b) Пути могут пересекаться по вершинам, время работы $O(n^3)$.

Задача 13. Дан двудольный граф, у каждой вершины есть вес. Требуется за $O(nm)$ построить паросочетание такое, что сумма весов всех вершин, входящих в паросочетание была максимальна, если:
a) Веса всех вершин второй доли равны нулю.
b) Веса всех вершин неотрицательны.

Задача 14. Вам дана матрица размера $n \times m$, в которой есть ячейки, в которых стоят стрелочки. Стрелочки можно перенаправить в четыре стороны: вверх, вниз, влево, вправо. Однако направлять стрелочки можно только в сторону других стрелочек (то есть нельзя направлять на пустые ячейки и границы матрицы). Двигаться по стрелочкам можно только в соседние клетки. Вам нужно придумать такой способ расстановки стрелочек, чтобы:
a) Количество циклов было максимально.
b) Количество циклов было минимально.

Задача 15. Из строки длиной n выписали все подстроки длины k, а потом стёрли саму строку. Требуется за $O(nk)$ по выписанным строкам восстановить исходную строку. Если вариантов несколько, то требуется найти лексикографически минимальную.

Задача 16. Дан граф, где не рёбрах написаны 0 и 1. За одно действие можно заменить на противоположное все числа на произвольном (не обязательно простом) пути в графе. Требуется за $O(n + m)$ найти способ за минимальное число действий сделать числа на всех рёбрах равными 0.

Задача 17. В Tinkoff Generation параллель А писали вступительную работу T школьников, из которых надо зачислить хотя бы t и разделить на 2 группы. Далее группам надо назначить суммарно n преподавателей, причём у каждого препода есть ограничение снизу и сверху на количество школьников, которых можно зачислить. Более того, у m пар преподов есть личная ненависть друг к другу и они не согласны вместе работать. Требуется за $O(m+n\log n)$ разделить школьников и преподов на группы.

Задача 18. Дан двудольный граф, в котором все рёбра раскрашены в цвета. Требуется за $O(n+m)$ выбрать какое-то паросочетание в графе и удалить его так, чтобы не осталось никаких пар одноцветных рёбер, смежных в какой-то вершине.