

## Корневые оптимизации

**Задача 1.** За  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  найти у натурального числа  $n$ :

- все его натуральные делители;
- его разложение на простые множители.

**Задача 2.** Найти количество треугольников (циклов длины 3) в неориентированном графе без петель из  $n$  вершин и  $m$  рёбер за  $\mathcal{O}(m\sqrt{m})$ , при условии, что:

- в нём нет кратных рёбер;
- в нём могут быть кратные рёбра.

— — —

**Задача 3.** Дано дерево из  $n$  вершин, изначально в каждой вершине записано число 0. Есть запросы двух видов.

- Прибавить ко всем вершинам, смежным с вершиной  $v$ , число  $x$ .
- Узнать значение в вершине  $v$ .

Ответить на  $q$  запросов за время  $\mathcal{O}(n + q\sqrt{n})$ .

**Задача 4.** Дан текст  $t$ , далее в online поступают запросы вида: дана строка  $s$ , найти количество её вхождений в текст. Известно, что сумма длин строк по всем запросам не превосходит  $S$ . Ответить на запросы за время  $\mathcal{O}(|t|\sqrt{S})$ .

**Задача 5.** Дано дерево из  $n$  вершин, изначально все вершины покрашены в белый цвет. Есть запросы двух видов.

- Покрасить вершину  $v$  в чёрный цвет.
- Для вершины  $v$  найти расстояние до ближайшей чёрной вершины.

Ответить на  $q$  запросов за время  $\mathcal{O}(n + q\sqrt{n})$ .

— — —

**Задача 6.** Есть запросы двух видов.

- Вставить на  $i$ -е место в массиве число  $x$ .
- Узнать количество чисел на отрезке  $[l; r]$ , значения которых лежат в отрезке  $[a; b]$ .

Ответить на  $n$  запросов за время:

- $\mathcal{O}(n\sqrt{n} \log n)$ ;
- $\mathcal{O}(n\sqrt{n} \log n)$ .

**Задача 7.** В предыдущей задаче добавить третий вид запроса: переворот отрезка  $[l; r]$ .

— — —

**Задача 8.** Дан массив  $a$  из  $n$  чисел, а также  $q$  запросов  $[l_i; r_i]$ . Для каждого запроса найти МЕХ чисел из этого отрезка, то есть минимальное целое неотрицательное число, не представленное среди  $a_{l_i}, a_{l_i+1}, \dots, a_{r_i}$ . Ответить на запросы за время:

- $\mathcal{O}((n + q)\sqrt{n} \log n)$ ;
- $\mathcal{O}((n + q)\sqrt{n})$ .

**Задача 9.** Дано дерево из  $n$  вершин, каждой вершине  $i$  сопоставлено число  $a_i$ . Также даны  $q$  запросов  $(u_i; v_i)$ . Для каждого запроса найти МЕХ на пути из  $u_i$  в  $v_i$ : если этот путь представляет из себя последовательность вершин  $w_1, \dots, w_k$ , то необходимо найти минимальное целое неотрицательное число, не представленное среди  $a_{w_1}, \dots, a_{w_k}$ .

**Задача 10.** Дан массив  $a$  из  $n$  чисел, а также  $q$  запросов двух видов.

- Узнать МЕХ на отрезке  $[l; r]$ .
- Установить значение  $i$ -го элемента массива равным  $x$ .

Ответить на запросы за время  $\mathcal{O}((n + q) \cdot n^{\frac{2}{3}})$ .

— — —

**Задача 11.** Дан массив  $a$  из  $n$  чисел. Рекорд — позиция  $i$  такая, что для всех  $j < i$ :  $a_j < a_i$ . Поступают  $q$  запросов: установить значение  $i$ -го элемента равным  $x$ . После каждого запроса необходимо узнать количество рекордов. Ответить на запросы за время  $\mathcal{O}(n + q\sqrt{n} \log n)$ .