Дерево отрезков, многомерные структуры, сканлайн и персистентность

Задача 1. На клетчатой плоскости отмеченно n прямоугольников. Требуется:
а) За $\mathcal{O}(n \log n)$ найти точку, покрытую максимальным числом прямоугольников;
б) За $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ найти квадрат с максимальной стороной, покрытый таким же числом прямоугольников.

Задача 2. Найти площадь объединения n прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат. $\mathcal{O}(n \log n)$.

Задача 3. Дан квадрат с крайними точками в $(0; 0)$ и в $(C; C)$, а также n точек внутри него. Найти максимальный квадрат, находящийся внутри этого квадрата, в котором не лежит ни одна из данных точек.
а) $\mathcal{O}(n \log n \log C)$;
б) $\mathcal{O}(n \log n)$.

— — —

Задача 4. Дан массив из n чисел. Требуется в онлайне отвечать на запрос: «Количество чисел на отрезке с l_i по r_i, значения которых находятся в отрезке от a_i до b_i».
а) $\mathcal{O}(n \log^2 n)$;
б) $\mathcal{O}(n \log n)$.

Задача 5. Прямая длиной C покрашена в белый цвет. Приходят запросы покраски отрезка в чёрный цвет. Требуется:
а) В оффлайне за $\mathcal{O}(n \log n)$ узнать, сколько клеток покрашено;
б) В онлайне за $\mathcal{O}(n \log C)$ узнать, сколько клеток покрашено.

— — —

Задача 6. На клетках поля $n \times m$ записаны некоторые числа. Приходит q запросов вида: *сумма в прямоугольнике* и *прибавление в точке*. Требуется ответить на все запросы первого типа за время $\mathcal{O}(nm + q \log n \log m)$

Задача 7. Та же задача, но теперь поле изначально заполнено нулями и время должно быть $\mathcal{O}(q \log n \log m)$.

Задача 8. На клетчатой доске шириной n в каждом столбце нижние a_i клеток закрашены. Приходят запросы двух видов:
1) Изменить какое-то a_i;
2) Найти количество закрашеных клеток в прямоугольнике.
Требуется за $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ времени и $\mathcal{O}(n \log n)$ памяти ответить на каждый запрос второго типа в:
а) Оффлайне;
б) Онлайне.

Задача 9. Дан массив из n целых неотрицательных чисел, не превосходящих C. Ответьте в онлайне на q запросов вида: «Найти gcd чисел на отрезке от l до r, значения которых лежат на отрезке от a до b».
а) $\mathcal{O}(n \log n \log C + q(\log^2 n + \log C))$;
б) $\mathcal{O}(n \log^2 n + n \log n \log C + q(\log n + \log C))$.

— — —

Задача 10. Дан пустой граф G_0 на n вершинах. Есть запросы двух типов:
1) Построить граф G_i, проведя ребро (u, v) в графе G_j;
2) Проверить, в одной ли компоненте связности графа G_i вершины u и v.
Требуется ответить на q запросов:
а) Оффлайн, $\mathcal{O}(n + q \log n)$;
б) Онлайн, $\mathcal{O}(q \log^2 n)$.

Задача 11. Дан массив длины n. Ответьте в онлайне на q запросов вида: «Найти k-ую порядковую статистику на отрезке от l до r».
а) $\mathcal{O}(n \log n + q \log^2 n)$;
б) $\mathcal{O}(n \log n + q \log n)$.

Задача 12. В предыдущей задаче добавить запрос изменения. $\mathcal{O}((n + q) \log^2 n)$.

— — —

Задача 13. Дано n прямоугольников со сторонами, паралелльными осям координат. Прямоугольники не пересекаются, но могут вкладываться. Вы можете перемещаться по плоскости, но, пересекая границы прямоугольника i, необходимо заплатить налог c_i. Необходимо в онлайне ответить на q запросов: «Вы начинаете в точке $(x_1; y_1)$, хотите попасть в точку $(x_2; y_2)$. Сколько вам придётся заплатить?». $\mathcal{O}((n + q) \log n)$.

Задача 14. Дано n прямоугольников со сторонами, паралелльными осям координат. Прямоугольники не пересекаются, но могут вкладываться. У прямоугольника i есть цвет c_i. Необходимо ответить в онлайне на q запросов, каждый из которых бывает двух видов:

1) Изменить какое-то c_i;

2) Найти количество различных цветов прямоугольников, вложенных в i-й.

За такую асимптотику:

а) $\mathcal{O}((n+q)\log^2 n)$;

б) $\mathcal{O}((n+q)\log n)$.

— — —

Задача 15. Дано n прямоугольников со сторонами, паралелльными осям координат. Прямоугольники не пересекаются, но могут вкладываться. Вы можете перемещаться по плоскости, но, пересекая границы прямоугольника i, необходимо иметь визу c_i. Необходимо в онлайне ответить на q запросов: «Вы начинаете в точке $(x_1; y_1)$, хотите попасть в точку $(x_2; y_2)$. Сколько различных виз вы должны иметь?». $\mathcal{O}((n+q)\cdot n^{\frac{2}{3}})$

Задача 16. Дан массив a длины n, все числа целые неотрицательные и не превосходят C. Ответить в онлайн на q запросов, каждый из которых бывает трёх типов:

1) Изменить какое-то a_i;

2) Все числа на отрезке $[l_i; r_i]$ взять по модулю x_i.

3) Найти сумму на отрезке $[l; r]$.

$\mathcal{O}((n+q)\log n \log C)$

— — —

Задача 17. Дан *отсортированный* массив длины n. Ответить в онлайн на q запросов, каждый из которых бывает двух типов:

1) Сделать $a_i = \min(a_i, x)$ для всех $i \le r$;

2) Найти сумму на отрезке $[l; r]$.

Задача 18. Дан массив a из n чисел. Рекорд — позиция i такая, что для всех $j < i$: $a_j < a_i$. Поступают q запросов: установить значение i-го элемента равным x. После каждого запроса необходимо узнать количество рекордов. Ответить на запросы за время $\mathcal{O}((n+q)\log^2 n)$.

Ещё интересная теория

Задача 19. Дано n отсортированных списков суммарной длины S. Отвечать на запросы вида: «В каждом из списков найти первый элемент, больший или равный x». Предпосчёт $\mathcal{O}(S)$ и ответ на запрос за $\mathcal{O}(n + \log S)$

Задача 20. Дан массив длины n. Отвечать в онлайн на q запросов, каждый из которых бывает двух типов:

1) Сделать $a_i = \min(a_i, x)$ для всех $l \le i \le r$;

2) Найти сумму на отрезке $[l; r]$.

Задача 21. Поддерживать персистентную очередь за $\mathcal{O}(1)$ на каждый запрос.