Матроиды

Определение. Матроид — система множеств $(E, \mathcal{F})$ $(\mathcal{F} \subseteq 2^E)$, для которой выполняется:

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$
2. $X \subseteq Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \in \mathcal{F}$
3. $\forall (X, Y \in \mathcal{F}, |X| > |Y|) : \ \exists (x \in X \setminus Y) : \ Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$

Задача 1. Приведите пример любого матроида, не совпадающего с матроидами из следующей задачи.

Задача 2. Покажите, что следующая система множеств — матроид:

а) (разноцветный матроид) E — множество элементов, у каждого из которых есть цвет, $\mathcal{F}$ — подмножества элементов такие, что никакой цвет не встречается более одного раза;

б) (графовый матроид) E — множество рёбер графа, $\mathcal{F}$ — подмножества рёбер, образующие лес;

в) (матроид паросочетаний) E — множество вершин графа, $\mathcal{F}$ — такие подмножества вершин, что существует паросочетание, покрывающие их.

($\star$д) (матричный матроид, для знающих линал) E — множество стобцов матрицы, $\mathcal{F}$ — линейно независимые подмножества стобцов.

Определение. Максимальные по включению подмножества $A \in \mathcal{F}$ множества $X \subseteq E$ называются базами множества X.

Задача 3. Докажите, что пункт 3 в определении матроида можно эквивалентно заменить на:

$3'$: $\forall (X, Y \in \mathcal{F}, |X| = |Y| + 1) : \ \exists (x \in X \setminus Y) : \ Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$

$3''$: $\forall (X \subseteq E)$: все базы X имеют одинаковый размер

Задача 4. Введём весовую функцию $c : \ E \to \mathbb{R}_+$. Теперь вес подмножества — сумма весов его элементов. Необходимо найти базу максимального веса. Докажите, что будет работать следующий алгоритм:

1. Изначально ответ $A = \varnothing$.
2. Отсортируем элементы в порядке неубывания веса и будем рассматривать их в таком порядке.
3. Рассматривая очередной элемент x, добавим его в множество A, если $A \cup \{x\} \in \mathcal{F}$.

Замечание: какой это алгоритм для графового матроида?