Потоки в сетях

Определение. Сеть — ориентированный граф $G = (V, E)$, в котором также задано следующее.

- Для каждого ребра задана пропускная способности $c(u, v) \geq 0$. Если $(u, v) \notin E$, то $c(u, v) = 0$.
- Выделено две вершины s и t — исток и сток, соответственно.

Определение. Поток — функция $f(u, v)$ такая, что для любых $u, v \in V$ выполняется:

- ограничение пропускной способности: $f(u, v) \leq c(u, v)$;
- антисимметричность: $f(u, v) = -f(v, u)$;
- сохранение потока: $\sum\limits_{v \in V} f(u, v) = 0$ для любой $u \in V \setminus \{s, t\}$.

Определение. Величина потока $|f|$ — сумма потоков из источника: $|f| = \sum\limits_{v \in V} f(s, v)$.

Определение. s-t-разрез (A, B) — разбиение $V = A \sqcup B$, $s \in A$, $t \in B$.

Определение. Пропускная способность разреза (A, B): $c(A, B) = \sum\limits_{u \in A} \sum\limits_{v \in B} c(u, v)$.

Определение. Поток через разрез (A, B): $f(A, B) = \sum\limits_{u \in A} \sum\limits_{v \in B} f(u, v)$.

Определение. Остаточная сеть G_f потока f в сети (V, E) — сеть (V, E_f), в которой пропускная способность ребра (u, v) равна *остаточной пропускной способности* $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$.

Определение. Увеличивающий путь — путь из s в t в остаточной сети такой, что каждое ребро в пути имеет положительную остаточную пропускную способность.

Задача 1. Докажите, что поток через разрез равен величине потока.

Задача 2. Докажите, что сумма потоков из источника равна сумме потоков в сток.

Задача 3. Максимальный поток — поток максимальной величины. Докажите:
а) если в остаточной сети есть увеличивающий путь, то поток не максимален;
б) если в остаточной сети нет увеличивающего пути, то поток максимален.

Задача 4. (**Теорема Форда-Фалкерсона**) Докажите, что максимальный поток равен минимальному разрезу. Минимальный разрез — разрез с минимальной пропускной способностью.

— — —

Задача 5. Дан двудольный граф:
а) сведите поиск паросочетания в нём к поиску потока;
б) для каждой вершины левой доли сказано, с каким максимальным количеством вершин правой доли она может быть связано, аналогично для вершин правой доли, найдите максимальное по размеру множество рёбер, удовлетворяющее условиям.

Задача 6. Дана таблица $n \times n$. Для каждой строки задана сумма чисел в ней, аналогично для столбцов. Восстановите числа в таблице или определите невозможность этого.

Задача 7. Найти в X графе k непересекающихся по Y путей из a в b.
а) X=ориентированном; Y=ребрам
б) X=ориентированном; Y=вершинам
в) X=неориентированном; Y=ребрам
г) X=неориентированном; Y=вершинам

Задача 8. Найти максимальный поток в сети с дополнительным ограничением: для каждой вершины v задано число s_v — максимальный суммарный поток, который может входить в вершину v.

Задача 9. Дан неориентированный граф. Определите, какое минимальное количество вершин необходимо удалить, чтобы из вершины A не была достижима вершина B.

Задача 10. Дано подвешенное дерево из n вершин и k списков вершин дерева суммарной длины m. Рассмотрим двудольный граф, где в левой доле расположены вершины, соответствующие спискам, а в правой — вершины, соответствующие вершинам дерева. Ребро (v, u) проведено тогда и только тогда, когда найдётся вершина w из списка v, притом w является предком u в дереве. Найдите максимальное паросочетание в этом графе.

Задача 11. Дан ограф, для каждого ребра заданы два числа l_i и r_i. Необходимо определить величину потока f_i для каждого ребра так, чтобы выполнялось $l_i \leq f_i \leq r_i$. Также должно выполняться сохранение потока.

Задача 12. Дана матрица $n \times m$, каждая клетка изначально покрашена в чёрный или белый цвет. Перекрасить вершину в чёрный стоит B, в белый — W. После того, как вы совершите все необходимые перекрашивания, вы дополнительно заплатите X за каждую пару соседних по стороне клеток различных цветов. Минимизируйте сумму потраченного.