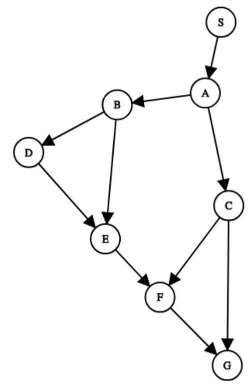
Дерево доминаторов

Филипп Грибов

23 марта 2019 г.

1 Доминатор

1.1 Определение



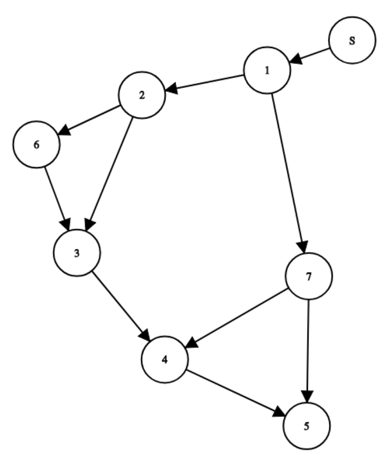
Представим себе ориентированный граф, в котором есть какая-то начальная вершина S, из которой все остальные достижимы. В таком графе вершина A **доминирует над вершиной** B, если любой путь из S в B проходит через A. Тогда если посмотреть на любой путь из S в B, то все доминаторы будут лежать на этом пути. Вершина A называется **непосредственным доминатором** вершины B, если не существует вершины C, такой что C доминатор B и C лежит на пути из A в B. Другими словами непосредственный доминатор это самый ближайших доминатор к вершине. Далее непосредственный доминатор обозначается за $idom(B)$.

Рассмотрим пример справа. У всех вершин кроме S есть хотя-бы один доминатор — вершина S. Так же вершина A является доминатором для всех вершин кроме A и S. Так же вершина B является доминатором для D и E. При этом $idom(A) = S$, $idom(B) = A$, $idom(C) = A$, $idom(D) = B$, $idom(E) = B$, $idom(F) = A$, $idom(G) = A$.

Заметим, что доминаторы образуют структуру дерева, т.е. если A — доминатор B и B — доминатор C, то A — доминатор C. И тогда всех доминаторов можно представить в виде дерева.

2 Алгоитм

2.1 DFS



Возьмём наш ориентированный граф и запустимся DFSом. Теперь перенумеруем вершины в порядке входа DFSа в эти вершины. В показанном ранее графе теперь вершины будут иметь номера как на рисунке справа. Так как все доимнаторы лежат на любом пути из S в A, то можно заметить, что доминаторы A будут так же дажать на пути из S в A в дереве обхода DFS и соответственно будут иметь меньшие номера, чем A.

2.2 Полудоминаторы

2.2.1 Определение

Мы уже пронумеровали вершины в порядке обзода DFS. Теперь можно ввести понятие полудоминатор. **Полудоминатором вершины** A называется вершина с минимальным номером, такая что из неё есть путь в A по вершинам, номер которых строго больше номера A. Далее обозначается за $sdom(A)$

Заметим, что предок в дереве обхода DFS имеет меньший номер, чем сама вершина, так что у любой вершины есть её полудоминатор. В примере справа $sdom(1) = S$, $sdom(2) = 1$, $sdom(3) = 2$, $sdom(4) = 1$, $sdom(5) = 1$, $sdom(6) = 2$, $sdom(7) = 1$.

2.2.2 Свойства

Заметим, что $sdom(A)$ обязательно должен лежать на пути из корня в A в дереве обхода DFS. Это верно, т.к. номер $sdom(A)$ меньше номера A, а значит DFS сначала зашёл в $sdom(A)$, а потом должен был зайти в A. Но т.к. есть путь от $sdom(A)$ в A, то значит DFS до выхода из $sdom(A)$ должен был ранее обойти все ранее не посещённые достижимые от него вершины, а значит должен был зайти и в A, т.е. A в поддереве $sdom(A)$ в дереве DFS.

Может показаться, что $sdom(A)$ равен $idom(A)$. Но вообще-то говоря это не обязательно верно. Однако мы знаем, что и $idom(A)$ и $sdom(A)$ лежат на пути из S в A в дереве обхода DFS. Тогда заметим, что $idom(A)$ должен лежать на пути из S в $sdom(A)$. (Т.е сначала идёт непосредственный доминатор, а уже потом идёт полудоминатор) Это верно т.к. в противном случае любой путь из $sdom(A)$ в A проходит через $idom(A)$, а значит по определению полудоминатора номер $idom(A)$ будет больше номера A. Но $idom(A)$ лежит на пути в дереве DFS из S в A, а значит номер $idom(A)$ должен быть меньше номера A. Противоречие. Значит утверждение доказано.

2.2.3 Нахождение полудоминатора

Раз мы определили этот странный полудоминатор, наверное он нам потом понадобится и нам придётся как-то найти его. Заметим следующий факт. Пусть есть вершина A. Тогда её полудоминатором может являться какая-то из вершин, от которой непосредственно ведёт ребро к A. Если же никакая такая вершина не является полудоминатором вершины A, то возьмём любую вершину B, из которой ведёт ребро в A и котора по номеру больше A. Теперь возьмём все вершины на пути от S к B в дереве обхода DFS, у которых номер больше, чем у A. (Другими словами мы смотрим, когда путь от S к B ответвился от пути от S к A, и дальше смотрим на все вершины на этом ответвлении). Утверждается, что полудоминатор A это минимальный по номеру среди всех полудоминаторов вершин на этих ответвлениях для всех возможных B.

Докажем это возьмём C — полудоминатор A. Если он связан напрямую ребром с A, то мы победили. Иначе у нас есть пути из C в A по вершинам, большим чем A и заметим, что последняя вершина на пути из C в A имеет номер больший, чем A и из неё есть ребро в A, т.е. это как раз определяемая ранее вершина B. Тепрь на этом же пути из C в A найдём минимальную по номеру вершину. Это какая-то вершина D. Заметим, что C подходит под определение полудоминатора для D (т.к. все остальные вершины на пути имеют больший номер, чем D), а значит полудоминатор D это C или какая-то меньшая по номеру вершина. Однако заметим, что полудоминатор D обязательно является полудоминатором A, т.к. из него есть путь по вершинам, номер которых больше номера D, а соответственно больше номера A, а так же из D есть путь по вершинам, номер которых больше A. Тогда полудоминатор D это C. Осталось только показать, что D лежит на пути из S в B. Т.к. D имеет меньший номер, чем B, то DFS сначала зашёл в D, а уже потом в B. И т.к. B достижима из D, то значит из D есть путь до B в дереве обхода DFS.

2.2.4 Алгоритм поиска полудоминаторов

Будем пользоваться предыдущим наблюдением. Переберём вершины в обратном порядке к тому, в котором мы их перебирали в DFS. Алгоритм за N^2 довльно тривиальный. Рассмотрим вершину A, переберём все те вершины, из которых в неё идут рёбра. Если такая вершина B меньше по номеру, то она кандидат на доминатор. Иначе же кандидаты на доминатор — доминаторы всех уже рассмотренных вершин, которые лежат в дереве обхода DFS на пути в B. При этом все такие вершины на самом деле представляют собой последовательный путь в этом девеве, начиная с какой-то вершины и заканчивая в B. При этом в дальнейшем когда мы будем рассматривать следующие вершины, то этот путь будет полностью вкладиваться в некоторые другие пути. Поэтому по аналогии с СНМ замутим тут сжатие путей. При этом когда мы сжимаем путь мы будем сразу запоминать минимальный доминатор по пожатой части. Возможно потом я подробнее тут напишу, что я хочу, но надеюсь и так понятно.

2.3 Поиск доминаторов

2.3.1 Несколько замечаний

Заметим такую вещь: если есть вершины A и B, такие что B лежит на пути из $idom(A)$ в A на дереве обхода DFS. Тогда заметим, что $idom(B)$ должен лежать на пути от $idom(A)$ в B в дереве обхода DFS. Другими словами доминаторы вложены друг в друга. Это верно так как любой путь из S в B можно продлить до A, а значит они все проходят через $idom(A)$, значит $idom(B)$ на может быть больше $idom(A)$.

Теперь заметим, что если есть вершина A и есть B — $sdom(A)$. Заметим, что если B не является $idom(A)$, то мы уже знаем, что $idom(A)$ идёт раньше в дереве обхода DFS чем $sdom(A)$. И т.к. они не равны, то есть путь от $idom(A)$ в A, не проходящий через $sdom(A)$. Тогда возьмём такой путь. Он сначала идёт по дереву обзода DFS, дальше ответвляется и потом приходит в какую-то вершину C на пути от $sdom(A)$ до A. Тогда заметим, что ответвление должно проходить полностью по вершинам, по номеру большим, чем C. Тогда $sdom(C)$ по номеру меньше $sdom(A)$. Тепрь посмотрим на все вершины на пути от $sdom(A)$ в A по дереву обхода DFS. Утверждается, что $idom(A)$ равен минимуму по $idom$ от всех вершин на пути. Пусть это не так. Заметим, что $idom(A)$ точно не больше чем $idom$ от всех вершин на пути от $sdom(A)$ к A (из утверждения выше). Тогда путь $idom(A)$ меньше чем $idom$ всех этих вершин. Тогда есть путь от $idom(A)$ к A, не проходящий ни через один другой idom. Этот путь идёт по каким-то вершинам на пути из S к A в дереве DFS, иногда отстыковывается от него. Посмотрим на тот момент времени, когда он отстыковался от него на вершине, которая была на пути из S в $sdom(A)$ до $sdom(A)$, а пристыковался на верщине на пути из $sdom(A)$ в A. Если он не пристыковался к A, то у той вершины, к которой он пристыковался есть путь от S к ней, не проходящий через её $idom$, что невозможно. Иначе этот путь пристыковывается к A, а т.к. он отстыкованный, то в нём номера всех вершин больше A. При этом он отстыковался раньше $sdom(A)$. Значит $sdom(A)$ не является минимальным. Противоречие. Значит такого нет. (На самом деле тут есть небольшая лажа, но мне вломас править)

Тепреь пусть $sdom(A)$ является $idom(A)$. Тогда, что у любой вершины на пути из $sdom(A)$ в A в дереве обхода DFS её $idom$ тоже лежит на этом пути (было ранее показано), а значит и $sdom$ от любой вершины на пути тоже больше чем $sdom(A)$. При этом мы уже поняли, что если $sdom(A)$ не $idom(A)$, то есть вершина на пути от $sdom(A)$ в A, у которой $sdom$ меньше $sdom(A)$. Значит если у любой вершины $sdom$ от неё меньше чем $sdom$ от A, то $sdom(A)$ это $idom(A)$.

2.3.2 Алгоритм

В принципе мы уже знаем как искать $idom(A)$. Нам достаточно перебрать все вершины на пути из $sdom(A)$ в A в дереве обхода DFS. Если этот путь состоит из 1 ребра, то так как там вообще нет вершин, то нет и вершин, у которых $sdom$ меньше $sdom(A)$. Значит $sdom(A)$ это и есть $idom(A)$. Иначе же там есть всякие вершины, при этом если есть вершина, у которой $sdom$ меньше $sdom(A)$, то мы ищем минимальный $idom$ у всех вершин на пути дерева обхода DFS от $sdom(A)$ в A. Если у всех вершин их $sdom$ больше $sdom(A)$, то $sdom(A)$ это $idom(A)$, при этом если посмотреть на первую вернину на пути из $sdom(A)$ в A, то её $sdom$ не меньше её предка, который является $sdom(A)$. Так же её $sdom$ не меньше её $idom$, что не меньше $idom(A)$, что равно $sdom(A)$. Короче говоря тогда получим, что тоже максимальный $idom$ на пути от $sdom(A)$ к A это $idom(A)$. Тогда у нас есть следующая задача: для вершины в дереве узнать минимум на отрезке от какого-то её предка до нёё и присвоить себе это значение. Это можно решать миллиардом способов, например ДО, двоичными подёмами или стеком.

Вообще я с самого начал не хотел это писать, но у меня чутка пригорело что нигде нормально про это не написанно. Скорее всего тут тоже не очень понятно, но видит бог, я пытался.